СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ – матричный структурный анализ

Продвинутая строительная механика

Проект "ERAMCA"

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage assets in Central Asia
Оценка Экологических Рисков и Смягчение Последствий для Объектов Культурного Наследия в Центральной Азии
v2022317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Содержание

Цели преподавателя/студентов

Цели преподавателя/студентов

- Изложить основы решения рамных конструкций с помощью расчетной программы.
- Понимать процедуру проведения расчетов с помощью программных обеспечений

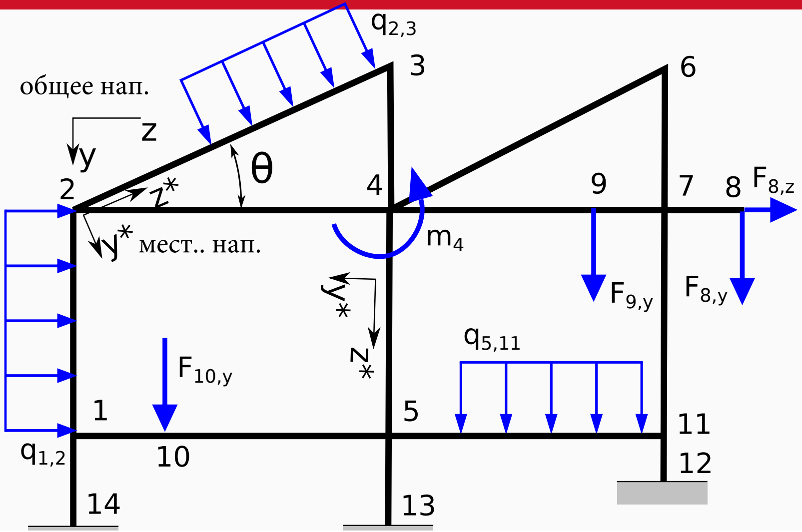
Введение

Презентация

Настройка процедуры (набор инструкций, выполняемых цифровым компьютером) для решения:

- 2D-схемы, состоящие из балки и колонны, с внутренними и внешними связями, выполненные из балок с поперечными сечениями, симметричными относительно вертикальной плоскости, лежащими в одной плоскости
- Нагрузки:
  - сосредоточенные силы, приложенные в вертикальной плоскости, пары с осью момента, перпендикулярной вертикальной плоскости, применяется к узлам
  - сосредоточенные или распределенные силы, находящиеся в вертикальной плоскости, применяется вдоль балок
- изготовлены из линейно упругих материалов

Плоские рамы



Но сначала. . .

Сохраняйте

спокойствие и

дайте

компьютеру

решить задачу

Теперь, когда мы все спокойны. . .

. . . давайте добавим некоторые детали!

Теперь, когда мы все спокойны. . .

. . . давайте добавим некоторые детали!

Какую задачу пользователь $\boxed{U}$ хочет решить?

Как программа $\boxed{S}$ решает задачу?

Какие данные необходимы для успешного запуска?

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели

U

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели

U

2. Применение внешних и внутренних ограничений

U

Краткое описание процедуры (1/2)

U

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели

U

2. Применение внешних и внутренних ограничений

3. Для каждой балки *e*, значения:

U

3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой)

Краткое описание процедуры

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощ импортирования модели
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки e, значения:

3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой)

3.3 свойства материала E и G (или E и ν)

U

U

U

U

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели U U
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки e, значения: U

   3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой)

   3.3 свойства материала E и G (или E и ν) U

4. Для каждого загруженного узла определения:

   4.1 силы F_z, F_y и M_x U

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели U U
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки ***e***, значения: U

   3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой)

   3.3 свойства материала E и G (или E и ν) U

4. Для каждого загруженного узла определения:

   4.1 силы F_z, F_y и M_x U

5. Для каждой нагруженной балки определения:

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели U U
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки **e**, значения:

U

3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой)

U

3.3 свойства материала E и G (или E и ν)

4. Для каждого загруженного узла определения:

4.1 силы F_z, F_y и M_x(*локально*) U

5. Для каждой нагруженной балки определения:

5.1 распределенные нагрузки q_{z^*} и q_{y^*} (локально) U

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели U U
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки e, значения:
   3.1 топология, т.е., узел i и j (т.е., длина L и угол θ_e), слайд 24 C
   3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой) U
   3.3 свойства материала E и G (или E и ν) U
4. Для каждого загруженного узла определения:
   4.1 силы F_z, F_y и M_x(*локально*) U
5. Для каждой нагруженной балки определения:
   5.1 распределенные нагрузки q_{z^*} и q_{y^*} (локально) U

Краткое описание процедуры (1/2)

1. Описание геометрии (координаты узлов), вручную или с помощью импортирования модели U U
2. Применение внешних и внутренних ограничен
3. Для каждой балки e, значения:
   3.1 топология, т.е., узел i и j (т.е., длина L и угол θ_e), слайд 24 C
   3.2 геометрия поперечного сечения (центроид G, площадь A и моменты второго порядка I_x также I_y обычно рассчитываются программой) U
   3.3 свойства материала E и G (или E и ν) U
   3.4 жесткость $\boldsymbol{K}_e$, матрица $\boldsymbol{N}_e$ и $\boldsymbol{K}^X$, слайд 14 C
4. Для каждого загруженного узла определения:
   4.1 силы F_z, F_y и M_x (*локально*) U
5. Для каждой нагруженной балки определения:
   5.1 распределенные нагрузки q_{z^*} и q_{y^*} (локально) U

Краткое описание процедуры (2/2)

6. Запустите программное обеспечение (и скрестите пальцы!)

U

Смотрите контрольный список, слайд 39!

Краткое описание процедуры (2/2)

6. Запустите программное обеспечение (и скрестите пальцы!)

U

10. Посмотрите результаты (списки, диаграммы нормальной силы, момента, сдвига; деформированной формы...); и тщательно проверьте

U

Смотрите контрольный список, слайд 39!

Краткое описание процедуры (2/2)

6. Запустите программное обеспечение (и скрестите пальцы!) U

7. Порядок обработки и определения ***K*** и ***R*** S

10. Посмотрите результаты (списки, диаграммы нормальной силы, момента, сдвига; деформированной формы...); и тщательно проверьте U

Смотрите контрольный список, слайд 39!

Краткое описание процедуры (2/2)

6. Запустите программное обеспечение (и скрестите пальцы!) U
7. Порядок обработки и определения ***K*** и ***R*** S
8. Решение и определение перемещений δ_L и сил V_V, слайд 36 S

10. Посмотрите результаты (списки, диаграммы нормальной силы, момента, сдвига; деформированной формы...); и тщательно проверьте U

Смотрите контрольный список, слайд 39!

Краткое описание процедуры (2/2)

6. Запустите программное обеспечение (и скрестите пальцы!) U
7. Порядок обработки и определения $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{R}$ S
8. Решение и определение перемещений $\boldsymbol{\delta}_L$ и сил $\boldsymbol{V}_V$, слайд 36 S
9. Для каждой балки $\boldsymbol{e}$, определяем (слайд 36):
   9.1 конечные силы $\boldsymbol{Q}_i^*$ и $\boldsymbol{Q}_j^*$ S
   9.2 внешние реакции $\boldsymbol{V}$ S
   9.3 нормальная сила, момент и сдвиг S
10. Посмотрите результаты (списки, диаграммы нормальной силы, момента, сдвига; деформированной формы...); и тщательно проверьте U

Смотрите контрольный список, слайд 39!

Описание операций, выполняемых программным обеспечением

Метод смещения (жесткости)

Смещения в каждом узле k принимаются в качестве кинематических параметров в системе локальных координат

$$\delta_i^* = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad \delta_j^* = \begin{bmatrix} \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

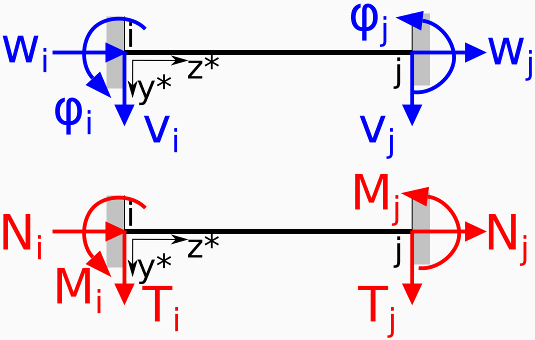
реакции на концах i и j каждой балки (по системе локальных координат) подверженные перемещению расчитываются:

$$\mathbf{Q}_i^* = \begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j^* = \begin{bmatrix} M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix},$$

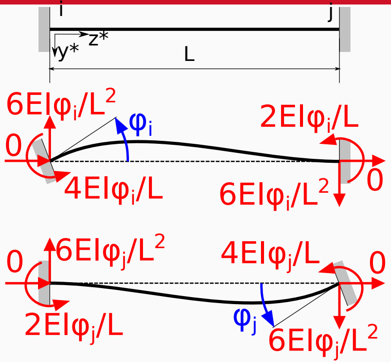
Суммируя силы, приложенные в каждом узле, можно установить равновесие и найти неизвестные перемещения.

Обозначение

Перемещения и силы в обеих концах балки положительны, если они направлены в то же направление системы координат. Вращения и пары положительны, если против часовой стрелки.



Вращения на концах



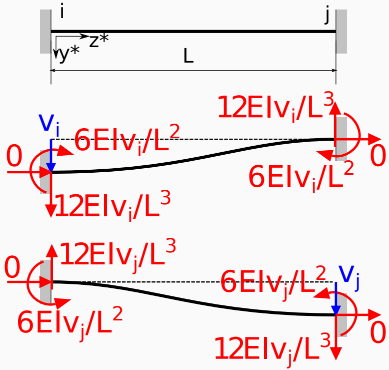
Вращение φ в одном конце и рассчитываются соответствующие реакции (локальная система координат):

- вращение φ_i узла i
- вращение φ_j узла j

$$M_i = \frac{4EI_x}{L}\varphi_i,\ T_i = -\frac{6EI_x}{L^2}\varphi_i,\ N_i = 0,\ M_j = \frac{2EI_x}{L}\varphi_i,\ T_j = \frac{6EI_x}{L^2}\varphi_i,\ N_j = 0$$

$$M_i = \frac{2EI_x}{L}\varphi_j,\ T_i = -\frac{6EI_x}{L^2}\varphi_j,\ N_i = 0,\ M_j = \frac{4EI_x}{L}\varphi_j,\ T_j = \frac{6EI_x}{L^2}\varphi_j,\ N_j = 0$$

Перемещения на концах



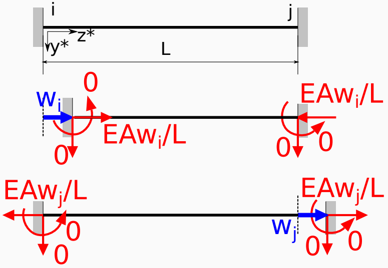
Перемещения v в одном конце и рассчитываются соответствующие реакции (локальная система координат):

- перемещение v_i узла i
- перемещение v_j узла j

$$M_i = -\frac{6EI_x}{L^2}v_i,\ T_i = \frac{12EI_x}{L^3}v_i,\ N_i = 0,\ M_j = -\frac{6EI_x}{L^2}v_i,\ T_j = -\frac{12EI_x}{L^3}v_i,\ N_j = 0$$

$$M_i = \frac{6EI_x}{L^2}v_j,\ T_i = -\frac{12EI_x}{L^3}v_j,\ N_i = 0,\ M_j = \frac{6EI_x}{L^2}v_j,\ T_j = \frac{12EI_x}{L^3}v_j,\ N_j = 0$$

Перемещения на концах (3/3)



Перемещения w в одном конце и рассчитываются соответствующие реакции
(локальная система координат):

- перемещение w_i узла i
- перемещение w_j узла j

$$M_i = 0,\ T_i = 0,\ N_i = \frac{EA}{L} w_i,\ M_j = 0,\ T_j = 0,\ N_j = -\frac{EA}{L} w_i$$

$$M_i = 0,\ T_i = 0,\ N_i = -\frac{EA}{L} w_j,\ M_j = 0,\ T_j = 0,\ N_j = \frac{EA}{L} w_j$$

Объединение в одну матрицу предыдущих связей, вращений φ_i and φ_j:

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_x}{L} & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}$$

Матрица жесткости балки

Последствия перемещений являются избыточными, перемещений: v_i и v_j:

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Перемещения w_i и w_j:

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости балки (4/4)

Матрица, которая связывает перемещения и внутренние силы на концах, представляет матрица жесткости (локальная система координат):

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

она симметрична, условия по диаганали положительные, и является уникальным (представляет балку, свободную в пространстве)

Матричная форма (1/2)

Предполагается:

$$\boldsymbol{\delta}_i^* = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_j^* = \begin{bmatrix} \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_i^* = \begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q}_j^* = \begin{bmatrix} M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \boldsymbol{K}_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Матричная форма

Связь между смещениями и реакциями такова:

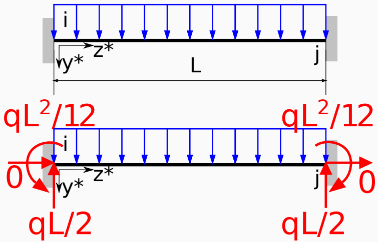
$$
\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\
-\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\
\frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\
\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}
$$

или, в более компактной форме:

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_i^* \\ \boldsymbol{Q}_j^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \end{bmatrix}
$$

Нагрузки

Если на балку действуют сосредоточенные или распределенные нагрузки, следует учитывать эквивалентные силы в узлах (противоположные реакции на защимленных концах):



Например, для равномерно распределенной нагрузки q:

$$M_i^0 = -\frac{qL^2}{12}, T_i^0 = +\frac{qL}{2}, N_i^0 = 0, M_j^0 = +\frac{qL^2}{12}, T_j^0 = +\frac{qL}{2}, N_j^0 = 0$$

Эквивалентные узловые нагрузки

Связь между перемещениями и реакциями с учетом эквивалентных узловых нагрузок:

$$\begin{bmatrix} M_i \\ T_i \\ N_i \\ M_j \\ T_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L} & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_i^0 \\ T_i^0 \\ N_i^0 \\ M_j^0 \\ T_j^0 \\ N_j^0 \end{bmatrix}$$

или:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_i^* \\ \boldsymbol{Q}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i^* \\ \delta_j^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_i^* \\ \boldsymbol{F}_j^* \end{bmatrix}$$

где: $: \boldsymbol{F}_i^* = [M_i^0 \; T_i^0 \; N_i^0]^T, \quad \boldsymbol{F}_j^* = [M_j^0 \; T_j^0 \; N_j^0]^T$

Равновесие балки

Для простой балки $i - j$ в локальной системе координат:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_i^* \\ \boldsymbol{Q}_j^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_i^* \\ \boldsymbol{\delta}_j^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_i^* \\ \boldsymbol{F}_j^* \end{bmatrix}$$

В компактной форме, где нижний индекс $_e$ показывает балку $i - j$:

$$\boldsymbol{Q}_e^* = \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{\delta}_e^* - \boldsymbol{F}_e^*$$

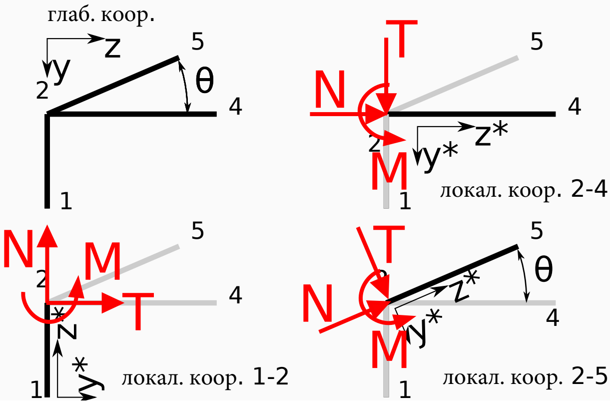
или:

$$\underset{(6\times 6)}{\boldsymbol{K}_e}\ \underset{(6\times 1)}{\boldsymbol{\delta}_e^*} = \underset{(6\times 1)}{\boldsymbol{Q}_e^*} + \underset{(6\times 1)}{\boldsymbol{F}_e^*}$$

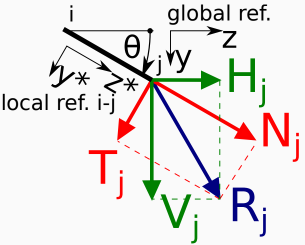
где, под каждой матрицей показаны соответствующие величины (количество строк $\times$ число столбцов).

Системы координат

Чтобы добавить компоненты сил, передаваемых балками в узлы, необходимо учитывать угол между локальной и общей системы координат:



Компоненты результирующего R_j это T_j, N_j (локальные координаты) и V_j, H_j (общие координаты). Момент M_j is динаково в обеих системах. Аналогичное преобразование для v_j и w_j (вращения не меняются)



Чтобы перейти от локальной к общей системе координат, матрица вращения $\boldsymbol{N}_e$ используется:

$$\boldsymbol{N}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_e & \sin\theta_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta_e & \cos\theta_e \end{bmatrix}$$

От локальной к общей системе координат (2/4)

Можно перейти из локальной системы (верхний индекс *) к общей системе координат:

$$\overset{*}{\boldsymbol{\delta}}_e = \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{\delta}_e$$

$$\overset{*}{\boldsymbol{Q}}_e = \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{Q}_e$$

$$\overset{*}{\boldsymbol{F}}_e = \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{F}_e$$

Уравнение равновесия балки:

$$\boldsymbol{K}_e \overset{*}{\boldsymbol{\delta}}_e = \overset{*}{\boldsymbol{Q}}_e + \overset{*}{\boldsymbol{F}}_e$$

и:

$$\boldsymbol{K}_e \boldsymbol{N}_e \boldsymbol{\delta}_e = \boldsymbol{N}_e \left(\boldsymbol{Q}_e + \boldsymbol{F}_e \right)$$

умножение в левой стороне (умножение матриц не является коммутативным, как обычно в алгебре!) по $\boldsymbol{N}_e^T$ для обеих сторон:

$$\boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{N}_e \delta_e = \boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{N}_e \left(\boldsymbol{Q}_e + \boldsymbol{F}_e\right)$$

Матрица $\boldsymbol{N}_e$ таков, что $\boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{N}_e = \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ нулевая матрица, за исключением диагонали, где значения равны единице (единичная матрица):

$$\left(\boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{N}_e\right) \delta_e = \boldsymbol{I} \left(\boldsymbol{Q}_e + \boldsymbol{F}_e\right)$$

Матрица не изменится, если ее умножить на $\boldsymbol{I}$:

$$\left(\boldsymbol{N}_e^T \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{N}_e\right) \delta_e = \boldsymbol{Q}_e + \boldsymbol{F}_e$$

От локальной к общей системе координат (4/4)

Теперь уравнение равновесия балки (общая система координат):

$$\left(\underset{(6\times6)}{\boldsymbol{N}_e^T}\;\underset{(6\times6)}{\boldsymbol{K}_e}\;\underset{(6\times6)}{\boldsymbol{N}_e}\right)\underset{(6\times1)}{\boldsymbol{\delta}_e}=\underset{(6\times1)}{\boldsymbol{Q}_e}+\underset{(6\times1)}{\boldsymbol{F}_e}$$

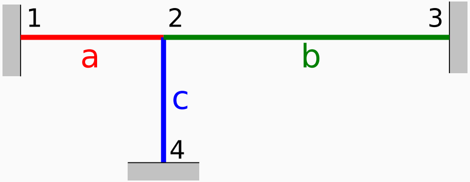
- $\boldsymbol{N}_e^T\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{N}_e$: матрица жесткости балки
- $\boldsymbol{\delta}_e$: вектор смещения узла
- $\boldsymbol{Q}_e$: вектор внешних реакций
- $\boldsymbol{F}_e$: вектор эквивалентной узловой силы

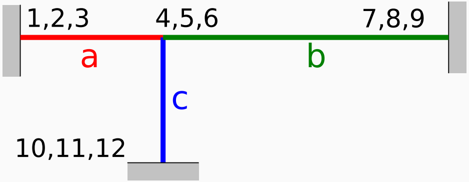
Формирование глобальных матриц жескости (1/5)

Матрицы жесткости и векторы реакции для каждой балки необходимо складывать с учетом соответствия между неизвестными и общими реакциями балки . Степени свободы нумеруются от 1 до *n*.

Балка	Узел *i*	Узел *j*
a	1	2
b	2	3
c	2	4

Узел	СС
1	1, 2, 3
2	4, 5, 6
3	7, 8, 9
4	10, 11, 12





Формирование глобальных матриц жесткости

Балка a:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
2	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
3	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
4	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
5	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
6	●	●	●	●	●	●	O	O	O	O	O	O
7	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
8	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
9	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
11	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
12	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Формирование глобальных матриц жескости (3/5)

Балки a и b:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
2	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
3	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
4	🔴	🔴	🔴	🔴🟢	🔴🟢	🔴🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
5	🔴	🔴	🔴	🔴🟢	🔴🟢	🔴🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
6	🔴	🔴	🔴	🔴🟢	🔴🟢	🔴🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
7	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
8	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
9	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
10	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
11	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
12	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Формирование глобальных матриц жескости (4/5)

Балки a, b и c:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
2	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
3	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	🔴	O	O	O	O	O	O
4	🔴	🔴	🔴	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🟢	🟢	🟢	🔵	🔵	🔵
5	🔴	🔴	🔴	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🟢	🟢	🟢	🔵	🔵	🔵
6	🔴	🔴	🔴	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🔴🟢🔵	🟢	🟢	🟢	🔵	🔵	🔵
7	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
8	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
9	O	O	O	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	🟢	O	O	O
10	O	O	O	🔵	🔵	🔵	O	O	O	🔵	🔵	🔵
11	O	O	O	🔵	🔵	🔵	O	O	O	🔵	🔵	🔵
12	O	O	O	🔵	🔵	🔵	O	O	O	🔵	🔵	🔵

Операция сборки представляет собой расширение 6×6 матриц или 6×1 векторов в глобальной системе координат, $n \times n$ и $n \times 1$ и их суммы. Верхний индекс ^{x} указывает расширение балки e.

$$\left(\sum_e \underset{(n\times n)}{\boldsymbol{K}^x}\right) \underset{(n\times 1)}{\delta} = \sum_e \underset{(n\times 1)}{\boldsymbol{Q}^x} + \sum_e \underset{(n\times 1)}{\boldsymbol{F}^x}$$

где:

- $\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{K}^x$: глобальных матриц жескости конструкции
- $\boldsymbol{F} = \sum_e \boldsymbol{F}^x$: вектор эквивалентной узловой силы

получается:

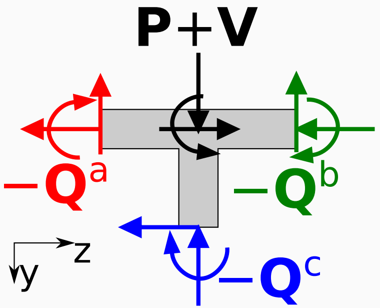
$$\boldsymbol{K}\delta = \sum_e \boldsymbol{Q}^x + \boldsymbol{F}$$

P представляет вектор сил, приложенных непосредственно к узлам и ***V*** вектор внешних реакций (связанные узлы), таким образом, получаем:

$$-\sum_e \boldsymbol{Q}^x + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$$

или:

$$\sum_e \boldsymbol{Q}^x = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{V}$$



Уравнения равновесия для узлов (2/2)

Для всей конструкции, если предположить $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{V} + \boldsymbol{F}$, это:

$$\boldsymbol{K}\,\delta = \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{K}$ симметричный, положительно определенный (i.e., $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x}^T > 0$ для $\forall\, \boldsymbol{x}$) и условия на диаганали положительны

Расчет перемещений

Правильно меняя строки и столбцы, $\boldsymbol{K\delta} = \boldsymbol{R}$ можно разделить так:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{LL} & \boldsymbol{K}_{LV} \\ \boldsymbol{K}_{VL} & \boldsymbol{K}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_L \\ \boldsymbol{\delta}_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_L \\ \boldsymbol{R}_V \end{bmatrix}$$

отделить L перемещения свободных узлов (неизвестны) из V перемещений ограниченных узлов (известно, равно нулю или задано).

From the first row, a linear equation system is obtained:

$$\boldsymbol{K}_{LL}\boldsymbol{\delta}_L = \boldsymbol{R}_L - \boldsymbol{K}_{LV}\boldsymbol{\delta}_V \quad \text{i.e.} \quad \boldsymbol{\delta}_L = \boldsymbol{K}_{LL}^{-1}(\boldsymbol{R}_L - \boldsymbol{K}_{LV}\boldsymbol{\delta}_V)$$

Его решение может быть осуществлено через численные процедуры, и дает неизвестный вектор $\boldsymbol{\delta}_L$

Расчет внешних реакций

Используя уравнение:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{LL} & \boldsymbol{K}_{LV} \\ \boldsymbol{K}_{VL} & \boldsymbol{K}_{VV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_L \\ \delta_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_L \\ \boldsymbol{R}_V \end{bmatrix}$$

Зная $\boldsymbol{\delta}_L$, из второй строки можно вычислить $\boldsymbol{R}_V$:

$$\boldsymbol{R}_V = \boldsymbol{K}_{VL}\delta_L + \boldsymbol{K}_{VV}\delta_V$$

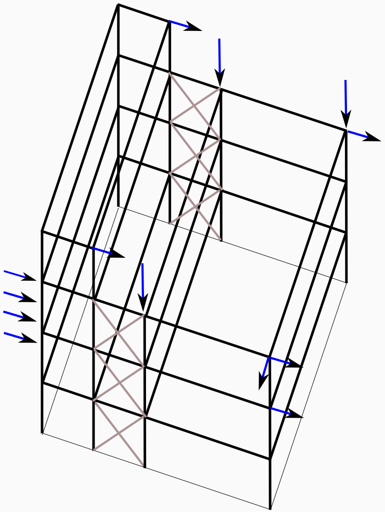
и, внешние реакции:

$$\boldsymbol{V}_V = \boldsymbol{R}_V - \boldsymbol{P}_V - \boldsymbol{F}_V$$

где $\boldsymbol{F}_V$ вектор эквивалентных узловых сил (связанных узлов) и $\boldsymbol{P}_V$ силы, непосредственно приложенные к узлам.

Трехмерные (пространственные) рамы

Процедура, представленная выше, может быть показана как трехмерная рама
Пространственная рама представляет собой конструкцию, собранную из линейных элементов, расположенных таким образом, что усилия передаются трехмерным образом. В некоторых случаях составной элемент может быть двухмерный



Трехмерные (пространственные) рамы (2/2)

Вот основные отличия:

- Каждый узел i или j трехмерной балки имеет 6 степеней свободы (3 перемещения и 3 вращения)
- В каждом узле действуют шесть сил (нормальные силы, две поперечные силы, два изгибающих момента и один крутящий момент).
- Матрица $\boldsymbol{K}_e$ будет 12×12 матриц
- $\boldsymbol{Q}_e$ и $\boldsymbol{F}_e$ будут векторами размерности 12×1

Размеры матриц и векторов увеличены, но автоматическая процедура (выполняется компьютером!) остается таким же

Как использовать программное обеспечение и выжить!

Несколько советов по выявлению ошибок:

- проверить корректность геометрии: например, нельзя создать матрицу жесткости для балки с нулевой длиной!
- проверить, если все необходимые данные для расчетной программы присутствуют (геометрия конструкции, геометрические и физические свойства)
- обрати внимание на нестабильные конструкции (глобальная матрица жесткости не может быть формирована)
- балки свободные в пространстве неустойчивы, так как глобальная матрица жесткости не может быть сформирована
- в трехмерном пространстве степень свободы балки равен 6!