СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ – Метод перемещения (или жесткости) Продвинутая строительная механика

Проект ЭРАМКА

Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии

v2022317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia

Table of Contents

Цели преподавателя/студентов

Цели преподавателя/студентов

- Предложите метод решения статически неопределимых конструкций, предполагающий качестве неизвестных перемещения или повороты.
- Поймите метод. Примените метод к структурам с одним неизвестным кинематическим параметром.

Введение

- Статически неопределимые конструкции – это конструкции, реакции которых нельзя определить, используя только уравнения равновесия; анализ таких структур требует, помимо уравнений равновесия, рассмотрения условия совместности перемещений, а значит, и относительной жесткости элементов конструкции
- Такие структуры также описываются как избыточные, в том, что они содержат элементы, или ограничения, сверх того, что требуется для равновесия

Метод смещения (или жесткости)

Процедура

- Определенные перемещения, называемые кинематические параметры выбираются как неизвестные. Когда эти параметры вычислены, решение с точки зрения внутренних сил и деформации возможен
- Можно найти бесконечные совместимые решения, и только одно, обеспечивающее равновесие конструкции

Узлы и кинематические неизвестные

Количество узлов должны быть выбраны; их перемещения - неизвестные задачи (кинематические неизвестные)

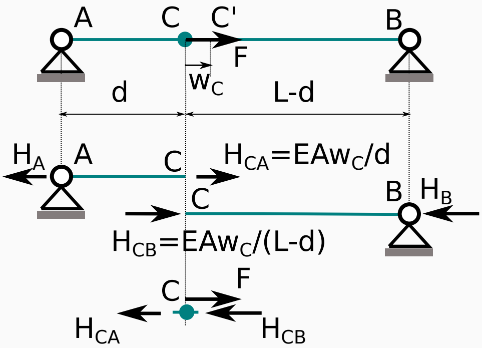
Нагрузки на узлы

Узлы нагружаются внешними силами и парами, а также силами и парами от балок, соединенных с теми же узлами; их равновесие позволяет получить неизвестные перемещения

Пример – балка под осевой нагрузкой (1)

Балка статически неопределима по отношению к осевым силам; все перемещения будут параллельны продольной оси

Внешняя сила приложена в точке C, поэтому такая точка выбрана в качестве узла, а ее перемещение в качестве основного параметра.



Равновесие

Записывается относительно недеформированной конфигурации; для малых перемещений и деформаций C близок к C'

Вспоминая взаимосвязь между осевой силой и удлинением (или укорочением) балки при растяжении (или сжатии), приложенной к AC и CB:

$$w_{C,CA} = \varepsilon_{z,CA}\, d = \frac{H_{CA}}{EA} d \implies H_{CA} = \frac{EA}{d} w_{C,CA}$$

$$w_{C,CB} = \varepsilon_{z,CB}\, (L-d) = \frac{H_{CB}}{EA}(L-d) \implies H_{CB} = \frac{EA}{L-d} w_{C,CB}$$

где $w_{C,CA} = w_{C,CB} = w_C$, равновесие для узла C дает:

$$-H_{CA} + F - H_{CB} = 0. \text{ i.e. } - \frac{EA}{d} w_C + F - \frac{EA}{L-d} w_C = 0$$

которые позволяют получить w_C:

$$w_C = \frac{F}{EA} \frac{d(L-d)}{L}$$

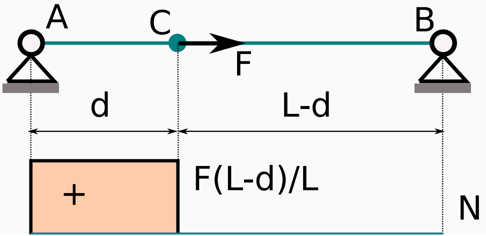
Пример – балка под осевой нагрузкой

Нормальная сила определяется выражением:

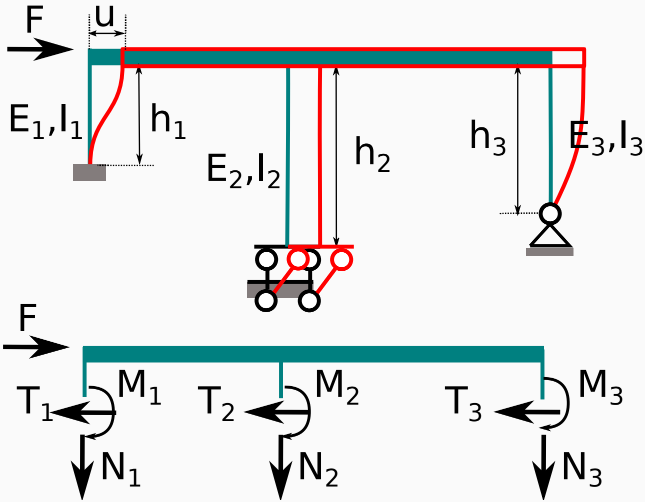
$$N_{CA} = H_{CA} = \frac{EA}{d} w_C = \left(\frac{EA}{d}\right)\left(\frac{F}{EA}\frac{d(L-d)}{L}\right) = F\frac{L-d}{L}$$

$$N_{CB} = -H_{CB} = -\frac{EA}{L-d} w_C = -\left(\frac{EA}{L-d}\right)\left(\frac{F}{EA}\frac{d(L-d)}{L}\right) = -F\frac{d}{L}$$

Часть AC подвергается растяжению, а часть BC — сжатию.



Пример – сдвиг рамы



Горизонтальная балка считается недеформируемой (бесконечно жесткой). Колонны считаются бесконечно жесткими относительно осевой деформации Единственным кинематическим параметром является горизонтальное смещение(узел конструкции).

Равновесие для горизонтальной балки:

$$-\sum_{i=1}^{3} T_i + F = 0 \implies -K_1 u_1 - K_2 u_2 - K_3 u_3 + F = 0$$

где K_1, K_2 and K_3 представляет жесткость на изгиби в трех осях относительно горизонтального смещения (см. таблицы в конце):

$$K_1 = 12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3}, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3}$$

Заметим что $u = u_1 = u_2 = u_3$, из этого получаем:

$$u = \frac{F}{K_1 + K_2 + K_3}$$

и:

$$T_1 = K_1 u = \frac{K_1}{K_1 + K_2 + K_3} F$$

$$T_2 = K_2 u = \frac{K_2}{K_1 + K_2 + K_3} F = 0$$

$$T_3 = K_3 u = \frac{K_3}{K_1 + K_2 + K_3} F$$

Из этого можно видеть, что F распределяется пропорционально K_1, K_2 и K_3 колонок.

Из этого следует, что:

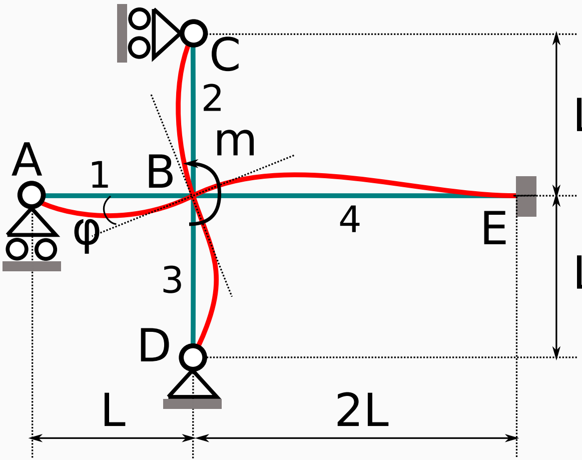
$$u = \frac{F}{12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3} + 3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3}}$$

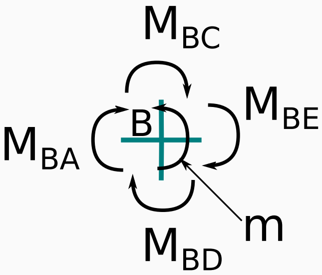
$$T_1 = 12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3} u = \frac{12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3}}{12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3} + 3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3}} F$$

$$T_2 = 0$$

$$T_3 = 3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3} u = \frac{3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3}}{12\frac{E_1 I_{x1}}{h_1^3} + 3\frac{E_3 I_{x3}}{h_3^3}} F$$

Пример – рама с фиксированными концами





Пример – рама с фиксированными концами (2 (2/5)

Балки предполагаются недеформируемыми, т. е. бесконечно жесткими по отношению к осевой деформпации($E_t A_t \to \infty$). ТТаким образом, осевой деформацией пренебрегают. Единственным кинематическим параметром является вращение вокруг узла B:

Момент равновесия узла дает: $\varphi = \varphi_B^{(BA)} = \varphi$

$$\sum_{i=1}^{4} M_i - m = 0 \implies K_1\varphi + K_2\varphi + K_3\varphi + K_4\varphi - m = 0$$

где K_1, K_2 и K_3 являются изгиб конец (см. таблицы в конце):

$$K_1 = 3\frac{EI_x}{L}, \quad K_2 = 3\frac{EI_x}{L}, \quad K_3 = 3\frac{EI_x}{L}, \quad K_4 = 4\frac{EI_x}{2L} = 2\frac{EI_x}{L}$$

Его можно получить:

$$\varphi = \frac{m}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4}$$

и:

$$M_1 = M_B^{(BA)} = K_1\,\varphi = \frac{K_1}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} m$$
$$M_2 = M_B^{(BC)} = K_2\,\varphi = \frac{K_2}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} m$$
$$M_3 = M_B^{(BD)} = K_3\,\varphi = \frac{K_3}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} m$$
$$M_4 = M_B^{(BE)} = K_4\,\varphi = \frac{K_4}{K_1 + K_2 + K_3 + K_4} m$$

Параметр м распределяется пропорционально жесткости К1,К2,К3 а также К4 балок.

Заменив:

$$\varphi = \frac{mL}{11EI_x}$$

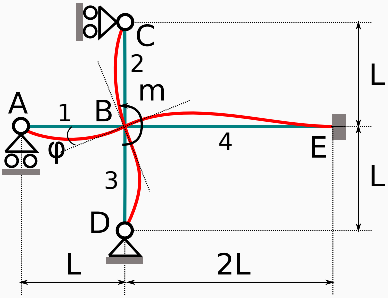
$$M_1 = M_B^{(BA)} = \frac{3}{11}m$$

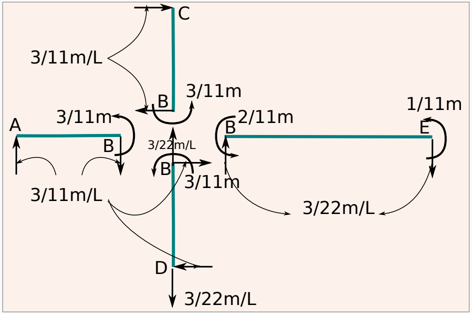
$$M_2 = M_B^{(BC)} = \frac{3}{11}m$$

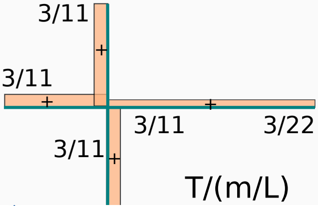
$$M_3 = M_B^{(BD)} = \frac{3}{11}m$$

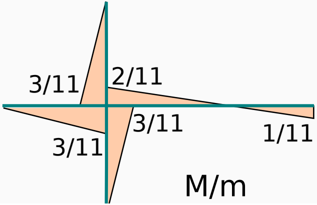
$$M_4 = M_B^{(BE)} = \frac{2}{11}m$$

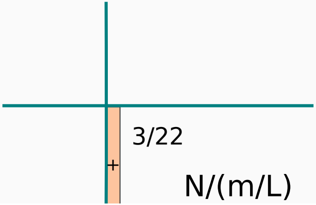
Пример – рама с фиксированными концами (4 (5/5)











Сравнение метода силы и метода перемещения

Метод силы и перемещения (1/2)

Силовой (гибкий) метод

- Выбор статически определимой конструкции за счет устранения избыточных реакций
- Статически определимая конструкция уравновешенная но не совместимая с опорами (перемещения опор в общем случае равны нулю)

Метод перемещения (жесткости)

- Выбор геометрически определимой конструкции с добавление ограничений для получения смещения равного нулю для всех узлов
- Геометрически определимая конструкция совместимая но не уравновешенная; для получения узлов с нулевыми перемещениями необходимо приложить силы и пары, отличные от реальных

Метод силы и перемещения (2/2)

Сила (гибкость) метод

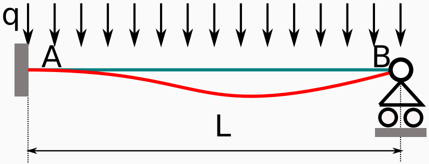
- можно получить совместимую систему применяя силы и пары X_i к узлам
- Силы и пары получапются X_i если предположить, что перемещения и повороты совместимы с опорами

Метод смещения (жесткости)

- Система может быть уравновешена введением перемещений и вращения Y_i к узлам
- Перемещения и повороты Y_i определяются путем наложения, что силы пары уравновешенны

Пример – неподвижно-неподвижная балка (1/5)

Рассматривается балка, представленная -ниже.



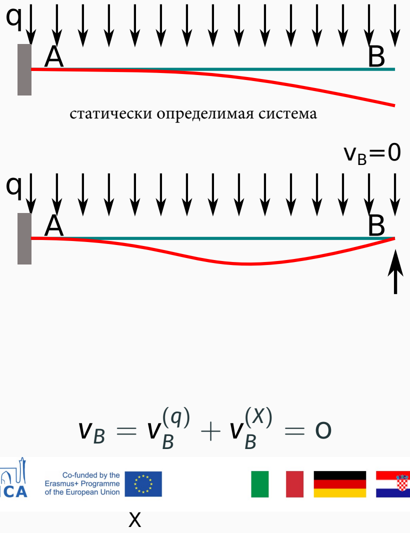
Метод сила (гибкость)

Статически определимая система получается удалением опоры в точке B.

Метод перемещений

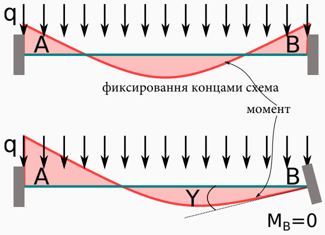
Система с нулевыми перемещениями получается заменой ролика в точке B опорой с неподвижным концом.

Метод сил



$$v_B = v_B^{(q)} + v_B^{(X)} = 0$$

Метод перемещений



$$M_B = M_B^{(q)} + M_B^{(Y)} = 0$$

Метод сил

Перемещения правого конца кантилевера хорошо известны (из прогиба) $v_B^{(q)} = \frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI_x}$ and

$v_B^{(X)} = -\frac{1}{3}\frac{XL^3}{EI_x}$ таким образом:

$$v_B = v_B^{(q)} + v_B^{(X)} =$$

$$\frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI_x} - \frac{1}{3}\frac{XL^3}{EI_x} = 0 \implies$$

$$X = V_B = \frac{3}{8}qL$$

Метод перемещения . Из суммы концов можно найти $M_B^{(q)} = -\frac{qL^2}{12}$ и

$M_B^{(Y)} = \frac{4EI_x}{L}Y$ таким образом:

$$M_B = M_B^{(q)} + M_B^{(Y)} =$$

$$-\frac{qL^2}{12} + \frac{4EI_x}{L}Y = 0 \implies$$

$$Y = \varphi_B = \frac{1}{48}\frac{qL^3}{EI_x}$$

Внутренние силы получаются суперпозицией

Метод сил

$$V_A = V_A^{(q)} + V_A^{(X)} = qL - X =$$

$$qL - \frac{3}{8}qL = \frac{5}{8}qL$$

$$V_B = V_B^{(q)} + V_B^{(X)} = 0 + X =$$

$$0 + \frac{3}{8}qL = \frac{3}{8}qL$$

$$M_A = M_A^{(q)} + M_A^{(X)} = \frac{1}{2}qL^2 - XL =$$

$$\frac{1}{2}qL^2 - \frac{3}{8}qL^2 = \frac{1}{8}qL^2$$

...

Метод перемещений

$$V_A = V_A^{(q)} + V_A^{(Y)} =$$

$$\frac{1}{2}qL + \left(+\frac{6EI_x}{L^2}\right)\left(\frac{1}{48}\frac{qL^3}{EI_x}\right) = \frac{5}{8}qL$$

$$V_B = V_B^{(q)} + V_B^{(Y)} =$$

$$\frac{1}{2}qL + \left(-\frac{6EI_x}{L^2}\right)\left(\frac{1}{48}\frac{qL^3}{EI_x}\right) = \frac{3}{8}qL$$

$$M_A = M_A^{(q)} + M_A^{(Y)} =$$

$$\frac{1}{12}qL^2 + \left(+\frac{2EI_x}{L}\right)\left(\frac{1}{48}\frac{qL^3}{EI_x}\right) = \frac{1}{8}qL^2$$

...

Пример – статически неопределимая балка (5/5)