Теория балок– **Расчет перемещений в статически неопределимых конструкций**

Продвинутая строительная механика

Проект ЭРАМКА

Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии

v2022317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Оглавление

Преподаватель/задачи студентов

Преподаватель/задачи студентов

Представить метод расчета перемещений и решения статически неопределимых конструкций с использованием теоремы о виртуальной работе.

Рассчитать перемещения для простых схем и решать простые статически неопределимые конструкции.

Введение

Теорема виртуальной работы – краткий обзор (1/2)

Теорема о виртуальной работы балки утверждает, что $\mathcal{L}_{ve} = \mathcal{L}_{vi}$:

- внешняя работа (всех сил, действующих на балку):

$$\mathcal{L}_{ve} = \int_0^L (p_a\, w_b + q_a\, v_b)\, dz +$$
$$+ (N_a\, w_b + T_a\, v_b + M_a\, \varphi_b)\,|_L + (-N_a\, w_b - T_a\, v_b - M_a\, \varphi_b)\,|_0 =$$
$$= \int_0^L (p_a\, w_b + q_a\, v_b)\, dz + (N_a\, w_b + T_a\, v_b + M_a\, \varphi_b)\,|_0^L$$

- внутренняя работа (внутренними силами):

$$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^L (N_a\, \varepsilon_b + T_a\, \gamma_b + M_a\, \chi_b)\, dz$$

- Теорема о виртуальной работе справедлива, если система a находится в равновесии, а система b кинематически допустима.
- Две системы независимы

далее. . .

. . . работой нормальной силы и сдвига пренебрегают, так что

$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^L M_a \chi_b \, dz$, i.e., учитывается деформируемость только на изгиб

Вычисление перемещений
(метод единичной загрузки

Расчет перемещений (метод удельной нагрузки) (1/3)

Конструкция загружена:

- внешними нагрузками (обоз." r")
- единичной силой *U* в точке и в направлении смещения, которое необходимо найти

В виртуальной работе реальные перемещения (синий цвет) связаны с силами конструкции, нагруженной единичной силой (красный цвет), таким образом, что искомое перемещение является единственным неизвестным уравнения.

Вертикальное перемещение точки B с жесткостью($E\,I_x = \text{const}$):

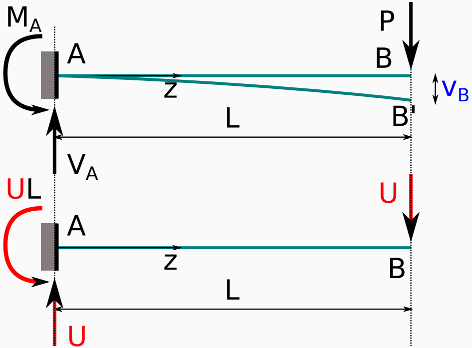
$$(U)\cancel{v_A}^{0} + (UL)\cancel{\varphi_A}^{0} + (0)\cancel{w_A}^{0} + (U)\,v_B =$$

$$\int_0^L M_U \chi_r \mathrm{d}z =$$

$$\int_0^L M_U \frac{M_r}{E\,I_x}\mathrm{d}z = \int_0^L \frac{M_r\,M_U}{E\,I_x}\mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{E\,I_x}\int_0^L [-P\,(L-z)]\,[-U\,(L-z)]\,\mathrm{d}z =$$

$$\frac{PU}{E\,I_x}\int_0^L (L-z)^2\mathrm{d}z \quad \text{i.e.,} \quad v_B = +\frac{P\,L^3}{3E\,I_x}$$



Поворот точки B с равномерной жесткостью (E Ix = const):

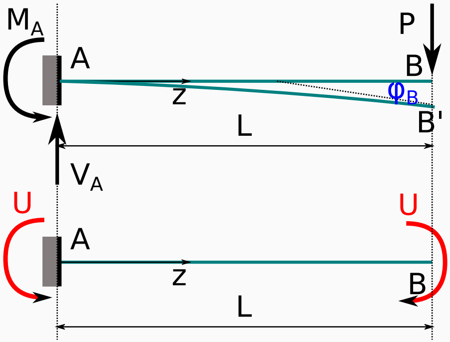
$$(0)\cancel{v_A}^{0} + (U)\cancel{\varphi_A}^{0} + (0)\cancel{w_A}^{0} + (U)\,\varphi_B =$$

$$\int_0^L M_U \chi_r \mathrm{d}z =$$

$$\int_0^L M_U \frac{M_r}{E\,I_x}\mathrm{d}z = \int_0^L \frac{M_r\,M_U}{E\,I_x}\mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{E\,I_x}\int_0^L [-P\,(L-z)]\,[-U]\,\mathrm{d}z =$$

$$\frac{PU}{E\,I_x}\int_0^L (L-z)\mathrm{d}z \quad \text{i.e.,} \quad \varphi_B = +\frac{P\,L^2}{2E\,I_x}$$



Статически неопределимые конструкции

Статически неопределимые конструкции

Выбор статически определяемой конструкции и:

- статически определимая конструкция, нагруженная внешними нагрузками («0»)
- статически определяемая конструкция, нагруженная силой, равной 1 нагрузке ("1")

В виртуальной работе реальные перемещения (синий цвет) связаны с силами статически определенной конструкции, нагруженной избыточной силой, равной 1 (красный цвет).

Superposition principle

Внешние реакции, нормальная сила, сдвиг, момент. . . для заданной конструкции находятся как $F = F_0 + X_1 F_1$

Момент и кривизна исходной конструкции равны:

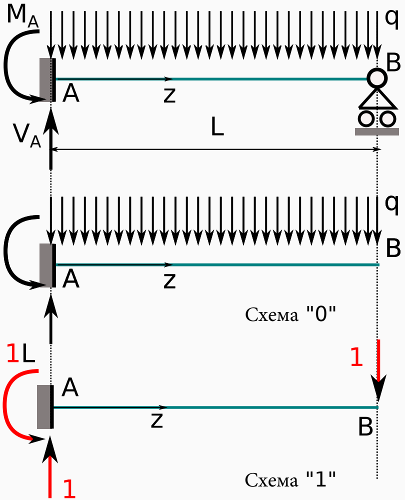
$$M_r = M_0 + X_1 M_1$$

$$\chi_r = \frac{M_r}{E\,I_x} = \frac{M_0 + X_1 M_1}{E\,I_x}$$

таким образом TWV является:

$$(1)\cancelto{0}{V_A} + (1L)\cancelto{0}{\varphi_A} + (0)\cancelto{0}{w_A} + (1)\cancelto{0}{v_B} =$$

$$\int_0^L M_1 \chi_r \, dz = \int_0^L M_1 \frac{M_r}{E\,I_x} dz$$



Из этого имеем:

$$0 = \int_0^L M_1 \frac{M_0 + X_1 M_1}{E\,I_x} dz = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{E\,I_x} dz + X_1 \int_0^L \frac{{M_1}^2}{E\,I_x} dz$$

где:

$$\int_0^L \frac{M_0 M_1}{E\,I_x} dz = \cdots = +\frac{qL^4}{8E\,I_x} \qquad \int_0^L \frac{{M_1}^2}{E\,I_x} dz = \ldots = +\frac{1L^3}{3E\,I_x}$$

т.е.

$$0 = +\frac{qL^4}{8E\,I_x} + X_1 \frac{1L^3}{3E\,I_x} \quad \text{so that} \quad X_1 = -\frac{3}{8}qL$$

Окончат. для данного прим: $M_A = M^A{}_0 + X_1 M_1{}^A = \left(+\frac{qL^2}{2}\right)\left(-\frac{3}{8}qL\right)(-1L) = -\frac{qL^2}{8}$

Упражнение 3: статически неопределимая конструкция (3/3)

Некоторые замечания:

- опр. $+\frac{qL^4}{8EI_x}$ представляет собой перемещение точки B из-за внешней нагрузки q, i.e., $v_B^{(q)}$
- опр. $+\frac{1L^3}{3EI_x}$ представляет собой смещение точки B из-за $X_1 = V_B = 1$, i.e., $v_B^{(1)}$
- Окончательное уравнение $v_B^{(q)} + v_B^{(X_1)} = v_B^{(q)} + X_1 v_B^{(1)} = 0$ (совместимость перемещения в точке B)
- отрицательное значение, полученное для $X_1 = -\frac{3}{8}qL$ означает что V_B противоположено силе 1 приложенной в точке B

Если степень неопределенности n больше единицы, можно применить аналогичную процедуру (получается система линейных уравнений размера $n \times n$)

Дополнительная информация

Численный интегральный расчет

Правило Симпсона для численного интегрирования:

$$p_i = \int_a^b f(z)\, g(z) \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{b-a}{6} \left[f(a)\, g(a) + 4\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\, g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\, g(b) \right]$$

Эта формула дает точные результаты. ..

. . . если $f(z)$ и $g(z)$ полиномы такие,что сумма их степеней ≤ 3

Численный интегральный расчет – пример

Если обе эпюры треугольные:

$$p_i = \int_a^b f(z)\, g(z) \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a)\, g(a) + 4\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\, g\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\, g(b)\right] =$$

$$\frac{L}{6}\left[(0)(0) + 4\left(\frac{M}{2}\right)\left(\frac{M'}{2}\right) + (M)(M')\right] = \frac{M\, M'}{3} L$$

это тот же результат строки 3, стойки 3 из таблицы слайда 14. Если $M = -P\,L$ и $M' = -U\,L$ (упражнение 1, слайд 6) $\frac{PU\ L^3}{3}$ получается.

TABLES FOR INTEGRAL CALCULATION

ALCUNI VALORI DI $\frac{1}{l}\int M' M \, dx$

l	M — M	— M	M_1 — M_2	M — $-M$	M — $-\frac{M}{2}$	αl, βl, M
M' — M'	$M'M$	$\frac{1}{2}M'M$	$\frac{1}{2}M'(M_1+M_2)$	0	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{2}M'M$
— M'	$\frac{1}{2}M'M$	$\frac{1}{3}M'M$	$\frac{1}{6}M'(M_1+2M_2)$	$-\frac{1}{6}M'M$	0	$\frac{1}{6}M'M(1+\alpha)$
M' —	$\frac{1}{2}M'M$	$\frac{1}{6}M'M$	$\frac{1}{6}M'(2M_1+M_2)$	$\frac{1}{6}M'M$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{6}M'M(1+\beta)$
M'_1 — M'_2	$\frac{1}{2}M(M'_1+M'_2)$	$\frac{1}{6}M(M'_1+2M'_2)$	$\frac{1}{6}\left[M'_1(2M_1+M_2)+ + M'_2(M_1+2M_2)\right]$	$\frac{1}{6}M(M'_1-M'_2)$	$\frac{1}{4}M'_1M$	$\frac{1}{6}M\left[M'_1(1+\beta)+ + M'_2(1+\alpha)\right]$
M' — $-M'$	0	$-\frac{1}{6}M'M$	$\frac{1}{6}M'(M_1-M_2)$	$\frac{1}{3}M'M$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{6}M'M(1-2\alpha)$
M' — $-\frac{M'}{2}$	$\frac{1}{4}M'M$	0	$\frac{1}{4}M'M_1$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{4}M'M\beta$
$-\frac{M'}{2}$ — M'	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{4}M'M_2$	$-\frac{1}{4}M'M$	$-\frac{1}{8}M'M$	$\frac{1}{4}M'M\alpha$
$l/2$, M'	$\frac{1}{2}M'M$	$\frac{1}{4}M'M$	$\frac{1}{4}M'(M_1+M_2)$	0	$\frac{1}{8}M'M$	$\frac{M'M}{12\beta}(3-4\alpha^2)$
γl, δl, M'	$\frac{1}{2}M'M$	$\frac{1}{6}M'M(1+\gamma)$	$\frac{1}{6}M'\left[M_1(1+\delta)+ + M_2(1+\gamma)\right]$	$\frac{1}{6}M'M(1-2\gamma)$	$\frac{1}{4}M'M\delta$	$\frac{M'M}{6\beta\gamma}(2\gamma-\gamma^2-\alpha^2)$ $\gamma \geq \alpha$
M'	$\frac{2}{3}M'M$	$\frac{1}{3}M'M$	$\frac{1}{3}M'(M_1+M_2)$	0	$\frac{1}{6}M'M$	$\frac{1}{3}M'M(1+\alpha\beta)$
M' — M'	$\frac{1}{3}M'M$	$\frac{1}{6}M'M$	$\frac{1}{6}M'(M_1+M_2)$	0	$\frac{1}{12}M'M$	$\frac{1}{6}M'M(1-2\alpha\beta)$

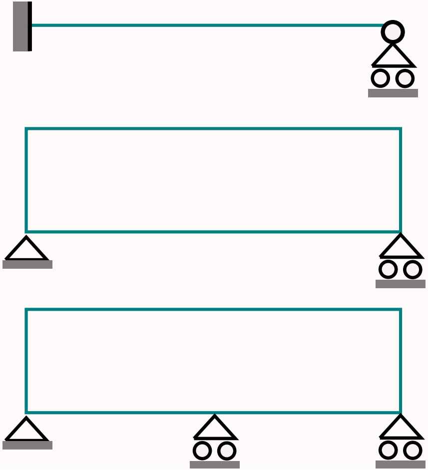
Tables for integral calculation

ALCUNI VALORI DI $\frac{1}{l}\int M' M \, dx$

l	M — M	M	M_1 — M_2	M — $-M$	M — $-\frac{M}{2}$	αl, βl, M
M'	$\frac{2}{3} M' M$	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{1}{12} M' (5 M_1 + 3 M_2)$	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{7}{24} M' M$	$\frac{1}{12} M' M (5 - \alpha - \alpha^2)$
M'	$\frac{2}{3} M' M$	$\frac{5}{12} M' M$	$\frac{1}{12} M' (3 M_1 + 5 M_2)$	$-\frac{1}{6} M' M$	$\frac{1}{24} M' M$	$\frac{1}{12} M' M (5 - \beta - \beta^2)$
M'	$\frac{1}{3} M' M$	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{1}{12} M' (M_1 + 3 M_2)$	$-\frac{1}{6} M' M$	$-\frac{1}{24} M' M$	$\frac{1}{12} M' M (1 + \alpha + \alpha^2)$
M'	$\frac{1}{3} M' M$	$\frac{1}{12} M' M$	$\frac{1}{12} M' (3 M_1 + M_2)$	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{5}{24} M' M$	$\frac{1}{12} M' M (1 + \beta + \beta^2)$
$l/2$, $-M'$, M'	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{1}{6} M' M_2$	$-\frac{1}{6} M' M$	$-\frac{1}{12} M' M$	$\frac{1}{6} M' M \alpha (1 + 2 \beta)$
$l/2$, M', $-M'$	$\frac{1}{6} M' M$	0	$\frac{1}{6} M' M_1$	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{1}{6} M' M$	$\frac{1}{6} M' M \beta (1 + 2 \alpha)$
$l/2$, M'_1, M'_2, M'_3	$\frac{1}{6} M (M'_1 + 4 M'_2 + M'_3)$	$\frac{1}{6} M (2 M'_2 + M'_3)$	$\frac{1}{6} [M'_1 M_1 + 2 M'_2 (M_1 + M_2) + M'_3 M_2]$	$\frac{1}{6} M (M'_1 - M'_3)$	$\frac{1}{12} M (2 M'_1 + 2 M'_2 - M'_3)$	$\frac{1}{6} M [M'_1 \beta + 2 M'_2 + M_3 \alpha - \alpha \beta (M'_1 - 2 M'_2 + M'_3)]$
M' parabola cubica	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{1}{5} M' M$	$\frac{1}{20} M' (M_1 + 4 M_2)$	$-\frac{3}{20} M' M$	$-\frac{1}{20} M' M$	$\frac{1}{20} M' M (1 + \alpha) (1 + \alpha^2)$
M' parabola cubica	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{1}{20} M' M$	$\frac{1}{20} M' (4 M_1 + M_2)$	$\frac{3}{20} M' M$	$\frac{7}{40} M' M$	$\frac{1}{20} M' M (1 + \beta) (1 + \beta^2)$
M' parabola cubica	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{2}{15} M' M$	$\frac{1}{60} M' (7 M_1 + 8 M_2)$	$-\frac{1}{60} M' M$	$\frac{1}{20} M' M$	$\frac{1}{20} M' M (1 + \alpha) \left(\frac{7}{3} - \alpha^2\right)$
M' parabola cubica	$\frac{1}{4} M' M$	$\frac{7}{60} M' M$	$\frac{1}{60} M' (8 M_1 + 7 M_2)$	$\frac{1}{60} M' M$	$\frac{3}{40} M' M$	$\frac{1}{20} M' M (1 + \beta) \left(\frac{7}{3} - \beta^2\right)$

Внешне на внутренне статически неопределимых конструкциях

Возможные неопределенные конструкции



- внешне статически неопределимая (верхняя)
- внешне статически определимая и внутренне статически неопределимая (средняя)
- внешне и внутренне статически неопределимы (внизу)