ТЕОРИЯ БАЛКИ – упругая устойчивость

Продвинутая строительная механика

Проект ЭРАМКА

Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии

v2022317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia

Оглавление

Цели преподавателя/студентов

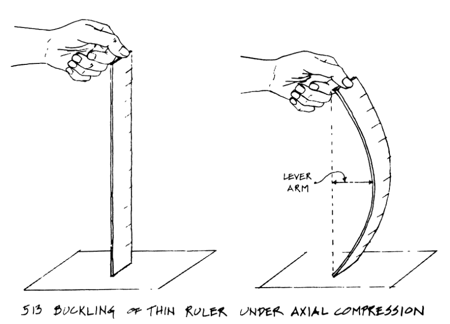
Цели преподавателя/студентов

Представьте поведение тонкостенных сжатых конструкций.

Разобраться с математической моделью. Примените теорию для расчета критической нагрузки на балки.

Введение

Устойчивость равновесия – коробление



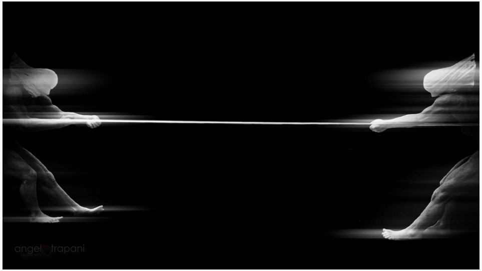
Устойчивость равновесия – выпучивание оболочки (2/3)

Buckling of Unstiffened shell | Buckling of Stiffened shell with Lozenge Grids | Buckling of Stiffened shell with Triangle grids

Красивое видео о короблении банки кока-колы.

Напряжение и сжатие

Поведение тонких упругих стержней под действием осевой силы зависит от знака N (растяжение или сжатие).

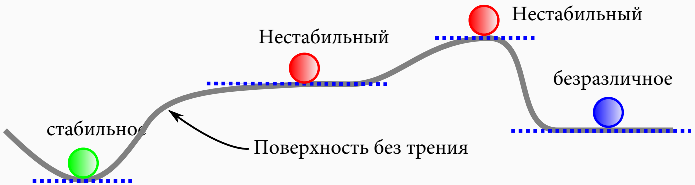


Растяжение: стержень остается прямым до разрыва (слева); сжатие: за пределами определенного значения N можно достичь отклоненных конфигураций в равновесии

Равновесие: стабильное, нестабильное и безразличное

Конфигурация в равновесии (C) немного смещена (C'):

- если система возвращается в исходное положение равновесия, говорят, что она устойчива
- если система удаляется дальше от этого положения, говорят, что она неустойчива.



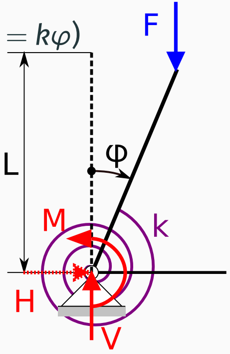
Твердое тело (шар) на поверхности без трения, гравитационное поле. Равновесие обеспечивается там, где касательная к поверхности горизонтальна, но только зеленый шар находится в состоянии устойчивого равновесия

Примеры с концентрированной упругостью

Равновесие относится к деформированной конфигурации!

Условия равновесия учитывают перемещения относительно недеформированной конфигурации

Жесткий стержень, упругость сосредоточена в торсионной пружине$(M = k\varphi)$



Уравнения равновесия:

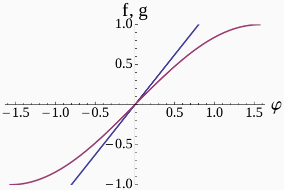
$$\begin{cases} H = 0 \\ V = F \\ M = FL\sin\varphi \end{cases}$$

M является функцией от φ, следовательно:

Последнее уравнение можно переписать как:

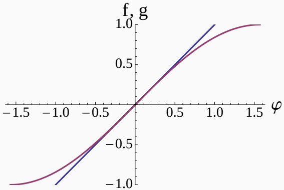
$$\frac{k}{FL}\varphi = \sin\varphi$$

$f(\varphi) = \frac{k}{FL}\varphi$ и $g(\varphi) = \sin\varphi$. Пересечения приводят к трем решениям:



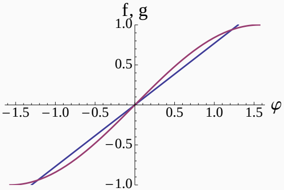
Одно решение ($\varphi = 0$)

$$\frac{k}{FL} > 1 \iff F < \frac{k}{L}$$



Одно решение ($\varphi = 0$)

$$\frac{k}{FL} = 1 \iff F = \frac{k}{L}$$



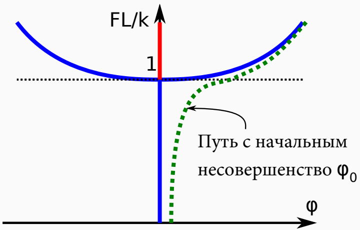
Три решения ($\varphi = -\varphi^*, 0, +\varphi^*$)

$$\frac{k}{FL} < 1 \iff F > \frac{k}{L}$$

Бифуркация равновесия – критическая нагрузка

Каждая точка диаграммы безразмерной силы $\frac{EL}{k}$ находится в равновесии. Если путь загрузки начинается с $F = 0$:

- Если $F < k/L$ стержень должен быть вертикальным($\varphi = 0$)
- Если$F > k/L$ стержень может быть вертикальным или перемещаться влево или вправо ($\pm\varphi^*$)
- Значение $F_{cr} = k/L$ где груз может приложена разными путями (бифуркация) – критическая нагрузка



Еще одна очень простая конструкция

Жесткий стержень, упругость сосредоточена в пружине($F_s = kL \sin\varphi$).

Уравнение равновесия в точке А:

$$\underbrace{(kL \sin\varphi)}_{\text{Сила } F_s} \underbrace{(L \cos\varphi)}_{\text{плечо}} - FL \sin\varphi = 0$$

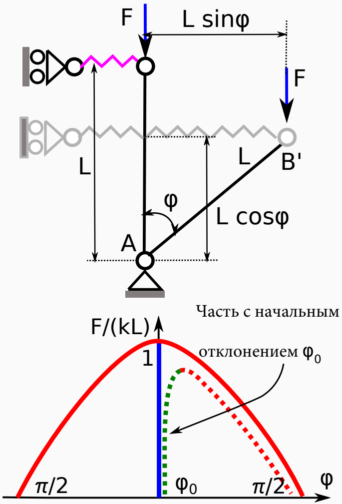
таким образом $F = kL \cos\varphi$

Это снова:

Синий: устойчивое положение

Красный: неустойчивая часть

Зеленое: стабильный путь с начальным отклонением φ_0



Неглубокая арка

Упругие стержни (постоянная упругости k);
равновесие узла B':

$$F - 2\,N_{AB}\sin\varphi = 0 \text{ где:}$$

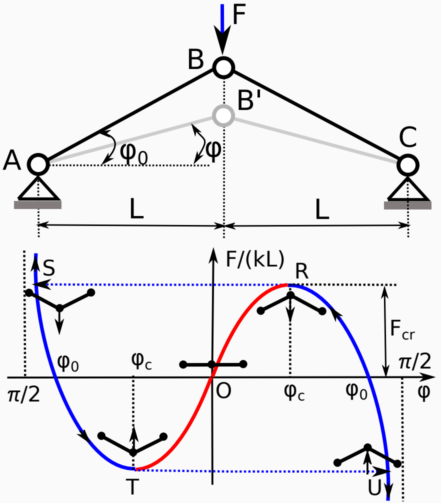
$$N_{AB} = k\,\Delta L_{AB} = k(AB' - AB) =$$

$$k\left(\frac{L}{\cos\varphi} - \frac{L}{\cos\varphi_0}\right)$$

таким образом:

$$\frac{F}{2kL} = \sin\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi_0}\right)$$

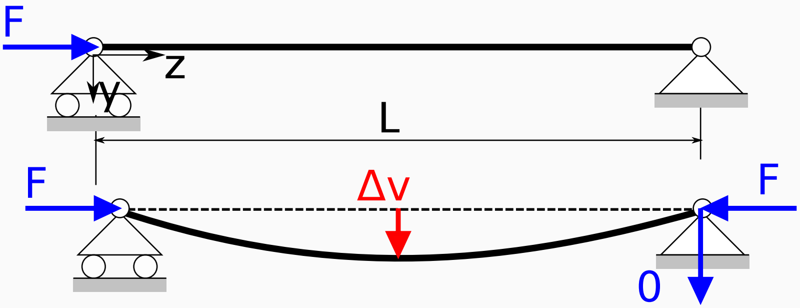
Часть начинается в φ_0, достигает φ_C (at R) и проходит через S.



Распределенная упругость

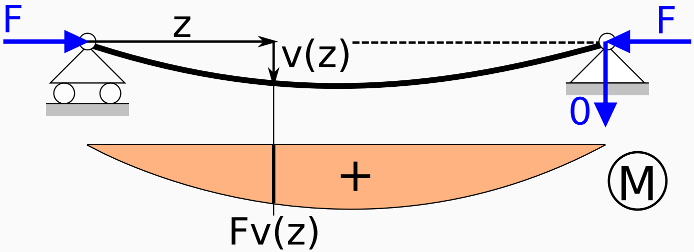
Балка нагружена на сжатие

Прямая балка подвергается осевому сжатию. Если первоначальная конфигурация немного сдвинется на бесконечно малое перемещение Δv, вернется ли система в исходное положение равновесия или будет отдаляться от этого положения дальше?



Равновесие в деформированной состоянии (1/2)

Для равновесия необходим момент, равный $M(z) = F\,v(z)$:



Момент внутри балки определяется уравнением упругой кривой:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{E\,I_x}$$

Равновесие в деформированном состоянии (2/2)

Подводя итоги, два момента находятся:

- $M_{\text{stab}} = -E\,I_x\,v''(z)$: стабилизирующий (или восстанавливающий) момент
- $M_{\text{dest}} = F\,v(z)$: дестабилизирующий момент

уравновешиваем $M_{\text{stab}} = M_{\text{dest}}$:

$$-E\,I_x\,\frac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} = F\,v(z)$$

или:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(z)}{\mathrm{d}z^2} + \frac{F}{E\,I_x} v(z) = 0$$

Решение дифференциального уравнения (1/3)

Это уравнение представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + \frac{F}{E\,I_x} v(z) = 0$$

общее решение такое:

$$v(z) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E\,I_x}}\,z\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{E\,I_x}}\,z\right)$$

Вспоминая граничные условия, которые должны выполняться на обоих концах, можно найти C_1 и C_2:

$$v(0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

Первое условие:

$$v(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

следовательно

$$v(z) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E\,I_x}}\,z\right)$$

$$v(L) = 0 \implies C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E\,I_x}}\,L\right) = 0 \implies C_1 = 0$$

Вспоминая, что $C_1 = C_2 = 0$, решение $v(z) = 0$. Это означает, что деформированная конфигурация перекрывает недеформированную конфигурацию!

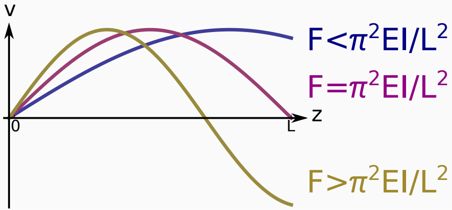
But...

Кажется, никакие другие решения, отличные от тривиального, невозможны.

Пересмотрев полученное уравнение, наложив граничное условие для $z = 0$:

$$v(z) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E\,I}}\,z\right)$$

оно удовлетворяет конечному условию для $z = L$ если сила F таков, что $\sin\left(\sqrt{\frac{E}{E\,I_x}}\,L\right) = 0$, e.g., for $\sqrt{\frac{E}{E\,I_x}}\,L = \pi$, or for $F = \frac{\pi^2 E\,I_x}{L^2}$



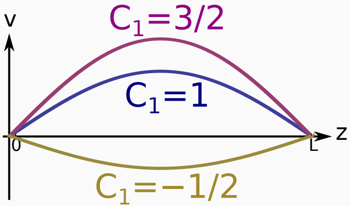
Уникальности нет

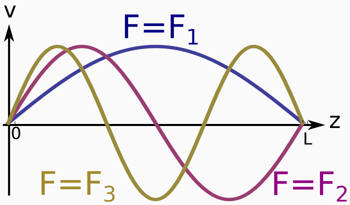
- Константа C_1 может принимать любое значение
- Существуют определенные значения F

$$\sqrt{\frac{F}{E\, I_x}}\, L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

или

$$F_1 = 1\,\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2},\; F_2 = 4\,\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2},\; F_3 = 9\,\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2},\; \ldots$$





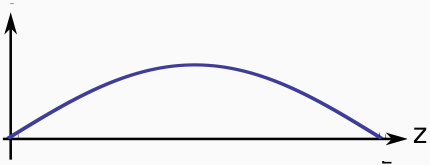
Критическая нагрузка (изгибающая нагрузка)

- Возможны бесконечные решения задачи, соответствующие синусоидальным кривым с разными периодами (невозможно найти величину прогиба)
- Нагрузка F должна принадлежать множеству $\{F_1, F_2, F_3 \ldots\}$
- Нагрузка, соответствующая n = 1, является нагрузкой потери устойчивости Эйлера.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_x}{L^2}$$

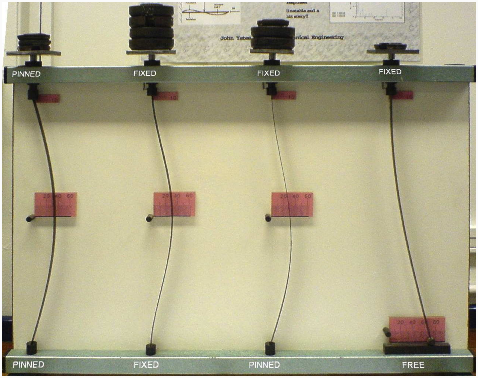
- Соответствующая кривая упругости называется критическим прогибом

$$F = F_{cr}$$



Различные конечные условия

Деформация и критическая нагрузка могут меняться в зависимости от условий опоры.

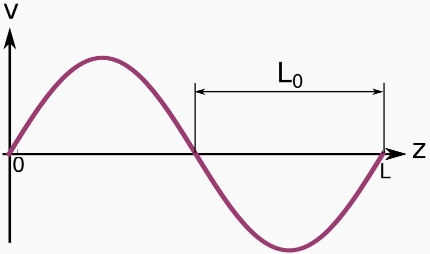


Эффективная длина

Когда опоры в конце отличаются от рассмотренных ранее, критическая нагрузка аналогична:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{L_o^2}$$

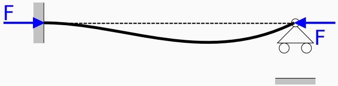
где L_o эффективная длина, т. е. расстояние между двумя соседними точками с нулевой кривизной синусоидальной кривой



Различные конечные условия

$$L_0 = L \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$

$$L_0 = L/2 \qquad F_{cr} = 4\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$



$$L_0 \approx 0.7L \qquad F_{cr} \approx 2\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$

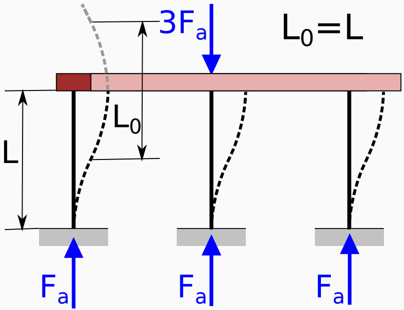
$$L_0 = 2L \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{4L^2}$$

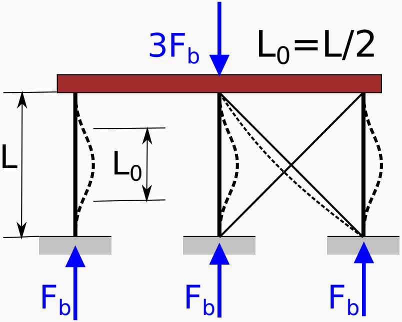
$$L_0 = L \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$

$$L_0 = 2L \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{4L^2}$$

Пример: рама при сдвиге

Горизонтальные смещения предотвращаются диагональными элементами (связями)





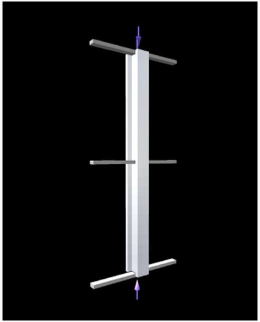
$$F_{a,cr} = \frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$

$$F_{b,cr} = 4\frac{\pi^2 E\, I_x}{L^2}$$

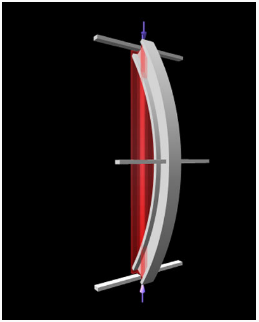
Вспомните коробление вне плоскости, когда зависимости могут вести себя по-разному!

Плоскость отклонения

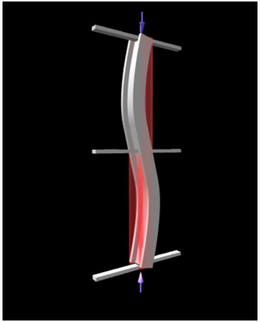
Критическая нагрузка равна $F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_x}{L_0^2}$, и зависит от плоскости прогиба, определяемой меньшим из $I_{xx}/L^2_{0,x}$ and $I_{yy}/L^2_{0,y}$



Недеформированная форма



Прогиб по сильной оси



Прогиб по слабой оси

Устойчивая форма

вводя радиус инерции $\rho_x = \sqrt{I_x / A}$, и безразмерную гибкость:

$$\lambda = \frac{L_0}{\rho_x}$$

критическая нагрузка $F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_x}{L_0^2}$ может быть выражена как:

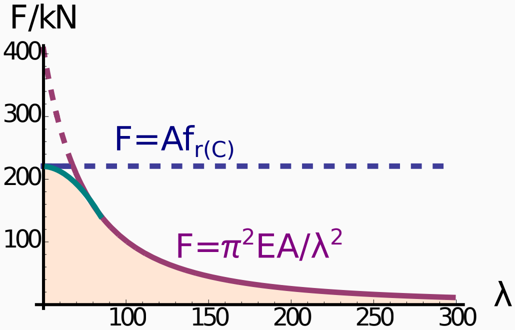
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E A}{\lambda^2}$$

Можно видеть, что критическая нагрузка (которая должна быть больше, чем приложенная нагрузка по соображениям безопасности) зависит от:

- A: площадь поперечного сечения
- E: модуль упругости балки
- λ: максимальная гибкость (в фактической плоскости изгиба, см. слайд 30)

Переход от потери устойчивости к разрушению при сжатии:

- тонкие колонны: упругая нестабильность (отказ от потери устойчивости)
- короткие столбцы: сбой сжатия

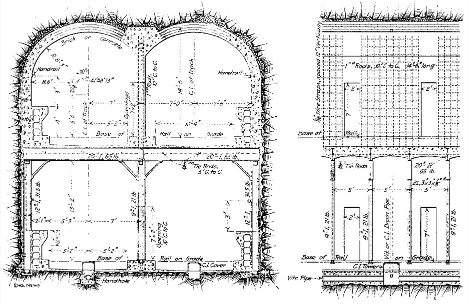


Стальной стержень (круглое сечение, диаметр 25 мм), $E = 210$ GPa, $f_{r(C)} = 450$ MPa

Реальные практические примеры

Стальные колонны

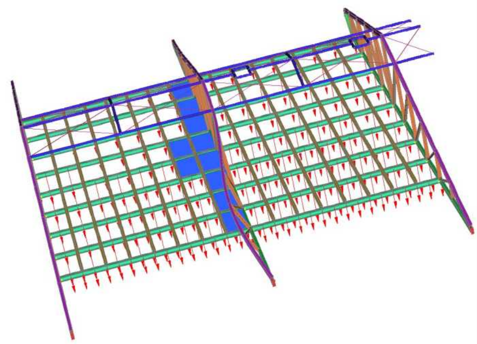
Неустойчивость стальных колонн (составной секции) под действием поездных нагрузок (метро Нью-Йорка)



http://www.nycsubway.org

Различные формы выпучивания (1/2)

- боковое выпучивание стальной ферменной рамы



http://www.hsh.info

- выпучивание стенки стальной балки

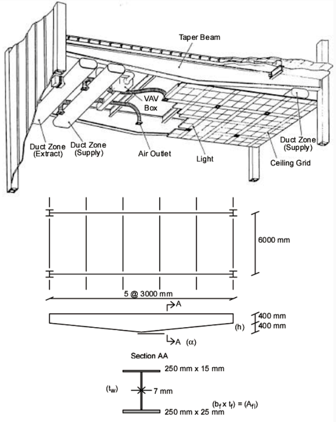
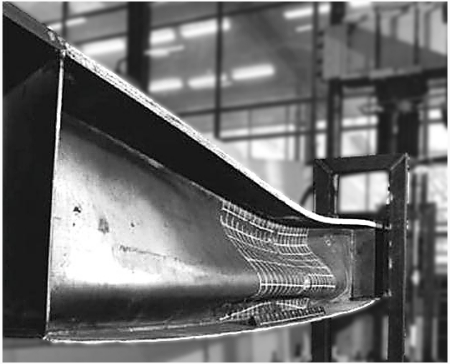


Figure 1. Typical composite tapered floor system.



Упражнение

Пример

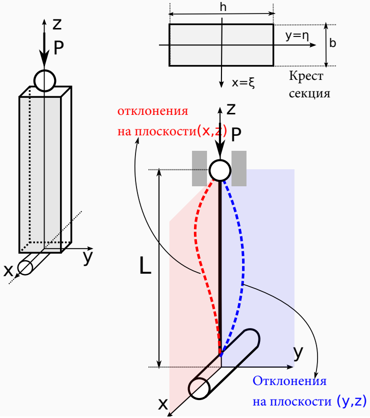
Колонна прямоугольного сечения: верхняя опора сдерживает перемещения по x и y; нижняя опора ограничивает перемещения по x и y и повороты вокруг y и z. Найдите критическую нагрузку.

- (x, z) плоскость выпучивания: петля с фиксированным концом, $L_0 \approx 0.7L$:

$$N_{cr}^{(x,z)} \approx \frac{\pi^2 E I_{yy}}{(0.7L)^2} \approx 2\frac{\pi^2 E I_{yy}}{L^2}$$

- (y, z) плоскость выпучивания: простая опора-шарнир, $L_0 = L$:

$$N_{cr}^{(y,z)} = \frac{\pi^2 E I_{xx}}{L^2}$$



Критическая нагрузка минимум между $N_{cr}^{(x,z)}$ и $N_{cr}^{(y,z)}$:

$$N_{cr} = \min(N_{cr}^{(x,z)},\ N_{cr}^{(y,z)}) = \min\left(2\,\frac{\pi^2 E I_{yy}}{L^2},\ \frac{\pi^2 E I_{xx}}{L^2}\right)$$

и зависит от I_{xx} и I_{yy}.

Если, например, предполагается $h = 2b$, it is $I_{xx} = 4$

I_{yy}:

$$N_{cr}^{(x,z)} = 2\,\frac{\pi^2 E \frac{I_{xx}}{4}}{L^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2 E I_{xx}}{L^2} \quad \text{and} \quad N_{cr}^{(y,z)} = \frac{\pi^2 E I_{xx}}{L^2}$$

Это означает, что минимальная критическая нагрузка равна $N_{cr}^{(x,z)}$:

$$N_{cr} = N_{cr}^{(x,z)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2 E I_{xx}}{L^2}$$