ТЕОРИЯ БАЛКИ - Прогиб балок

Строительная механика

Проект ERAMCA

[Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии]

v2o22317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia

Содержание

Цели преподавателя/студентов

Цели преподавателя/студентов

- Представить деформацию плоских упругих балок в терминах смещения продольной оси.
- Понять математическую модель прогиба и метод решения с учетом правильных граничных условий. Применить теорию для расчета перемещений и вращений балок при различных нагрузках и граничных условиях.

Введение

Цель

В инженерных работах часто возникает необходимость оценить перемещения конструкции, подверженной нагрузкам:

- на стадии проектирования, чтобы оценить, являются ли перемещения при обычных нагрузках приемлемыми или нет
- во время окончательного статического испытания, чтобы оценить, ведет ли конструкция при расчетных нагрузках себя так, как ожидалось, не выходя за пределы упругости

Мост через канал Лоргана на железной дороге Болонья–Портомаджоре. Испытание моста.

Цель

Разработать теорию (т.е. математическую модель), которая позволяет вычислять перемещения v, перпендикулярные оси балки, как функцию:

- длина балки
- форма и размер поперечного сечения балки
- свойства материала
- положение и величина нагрузок
- опоры

Чтобы найти математическое выражение, которое присваивает z , т.е. абсциссе вдоль оси балки, значение функции перемещения v (z). Это выражение называется прогибом.

Гипотеза (1/2)

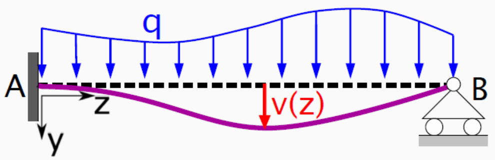
Для упрощения решения задачи предположим, что:

– продольная ось балки z, прямая

– распределенная нагрузка является непрерывной функцией и действует перпендикулярно оси балки, т.е. вертикально

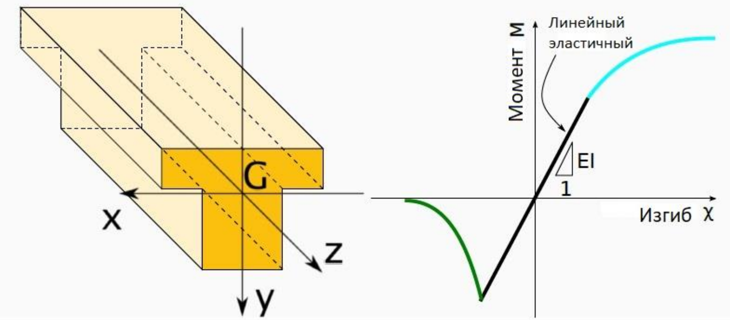
– боковые смещения v(z) малы по отношению к размеру поперечного сечения, а повороты φ(z) оси опущены

– деформация сдвига γ пренебрегается



Кроме того, предположим, что:

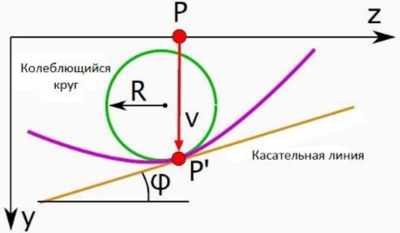
- поперечное сечение является постоянным по длине балки и симметричным относительно вертикальной плоскости
- максимальная сила не превышает пределов упругости



Уклон и изгиб

Для любой кривой на плоскости можно определить:

- уклон, т.е. угол φ, который образует касательная линия с осью z, положительный, если против часовой стрелки (как на рисунке)
- кривизна χ, модуль которой равен обратной величине радиуса R колеблющейся окружности ($\chi = 1/R$) и знак положительный, если вогнутость кривой направлена в сторону отрицательной части оси y (как на рисунке)



Геометрические приближенности

Если математическое выражение кривой равно $v = v(z)$, с отмеченными ранее условными обозначениями, кривизна в любой точке равна

$$\chi(z) = -\frac{v''(z)}{\sqrt{\left(1 + v'(z)^2\right)^3}}$$

Если вращение φ мало (незначительно мало по отношению к единице), то действительны следующие приближения

$$\varphi(z) = -v'(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$$

$$\chi(z) = -v''(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка (1/2)

Соотношение между изгибающим моментом и кривизной в данной точке Q, по оси абсцисс z, равно:

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{K_{B,e}} = \frac{M(z)}{E\,I_x}$$

где произведение E I_x — прочность балки на изгиб

Приближение для малых вращений приводит к

дифференциальное уравнение 2-го порядка для эластичной кривизны

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{E\,I_x}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M(z)}{E\,I_x}$$

- определить изгиб v(z), когда известен изгибающий момент M(z) (M(z) должен быть определен на предыдущем шаге)
- – нужна двойная интеграция
- – требуется 2 граничных условия (по одному для каждого конца или оба на одном конце)

Предельные условия

Если P является одним из двух концов, A или B, балки:

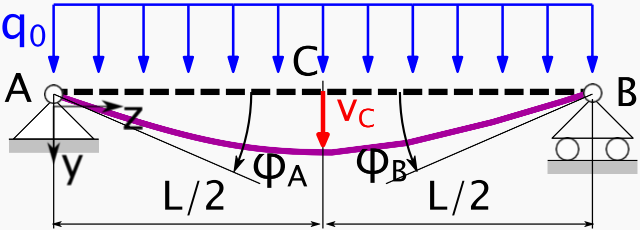
Кинематические предельные условия: при перемещениях или поворотах (два)

- если смещения предотвращены, $v|P = 0$
- если вращение предотвращено, $v'|P = 0$ (поскольку $\varphi = -v'$)

В общем случае известные величины ($v|P$, $\varphi|P$) могут отличаться от нуля (расчетные значения); внешние реакции и изгибающий момент $M(z)$ определяются предварительно.

Пример

Задача: Определите выражение функции смещения для балки с простой опорой длиной L и жесткостью при изгибе $E\,I_x$ при равномерно распределенной нагрузке q_0; вычислите прогиб в средней точке V_C и повороты на концах φ_A, φ_B



Пример 1 (2/4)

Уточнение: момент для этого луча равен $M(z) = \frac{qLz}{2} - \frac{qz^2}{2}$. Жесткость E Ix, которая является постоянной, выходит из интегрирования. Константы интегрирования C_1 и C_2 входят в конечное выражение:

$$E\,I_X\,v''(z) = -M(z) = \frac{qz^2}{2} - \frac{qLz}{2} \qquad (1)$$

$$E\,I_X\,v'(z) = E\,I_X\,(-\varphi(z)) = \frac{qz^3}{6} - \frac{qLz^2}{4} + C_1 \qquad (2)$$

$$E\,I_X\,v(z) = \frac{qz^4}{24} - \frac{qLz^3}{12} + C_1 z + C_2 \qquad (3)$$

На концах A и B вертикальные перемещения (оба нулевые) являются известными величинами.

Для получения значений констант интегрирования на перемещения накладываются краевыеусловия

- на A (z = 0) это $v|_A = v(0) = 0$
- на B ($z = L$) это $v|_B = v(L) = 0$

то есть:

$$v(0) = 0 \implies 0 = C_2$$

$$v(L) = 0 \implies 0 = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{12} + C_1 L, \quad C_1 = +\frac{qL^3}{24}$$

Подставляя в уравнение 3, получаем функцию смещения v(z):

$$v(z) = \frac{1}{E\,I_x}\left(\frac{qz^4}{24} - \frac{qLz^3}{12} + \frac{qL^3}{24}z\right)$$

Прогиб в среднем пролете равен:

$$c = v(L/2) = +\frac{5}{384}\frac{q_0L^4}{E\,I_x}$$ (положительный, т.е. такой же, как y)

Вращения $\varphi_A = -\varphi_B$ вычисляются по первой производной:

$$\varphi_A = -v'(0) = -\frac{1}{24}\frac{q_0L^3}{E\,I_x}$$ (отрицательный, т.е. по часовой стрелке)