

ТЕОРИЯ БАЛКИ - Кинематика

Строительная механика

Проект ERAMCA

[Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии](#)

v2o22317

Эта работа находится под лицензией [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#).



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Цели преподавателя/студентов

Введение

Кинематика



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Цели преподавателя/студентов



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

-  Представить основные аспекты кинематического поведения балок.
-  Чтобы понять взаимосвязь между перемещениями оси балки и деформациями.

Вступление



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Цель этой лекции – предоставить информацию, необходимую для понимания взаимосвязей между перемещениями продольной оси и деформациями, т.е. **кинематических уравнений**

Это плоская задача, в которой внешние нагрузки прикладываются в вертикальной плоскости (y, z), а поперечное сечение (перпендикулярное z) симметрично относительно y . Это означает, что деформированная форма лежит в плоскости (y, z).

Предполагаются небольшие перемещения и вращения.

- эффектом кривизны пренебрегают
- удлинение для элементарной длины вычисляется без учета вращения

Кинематика



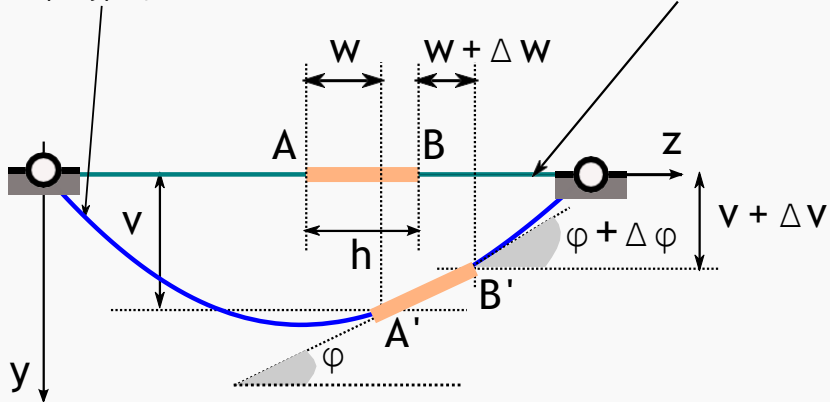
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Деформированная конфигурация

Недеформированная конфигурация



Рассмотрены **простые режимы деформации** малого элемента длиной h :

- продольная деформация или удлинение
- деформация сдвига
- жесткое вращение
- кривизна

Переменная деформация вдоль продольной оси учитывается с помощью предельного процесса: балка считается состоящей из элементов длины h , приближающейся к нулю

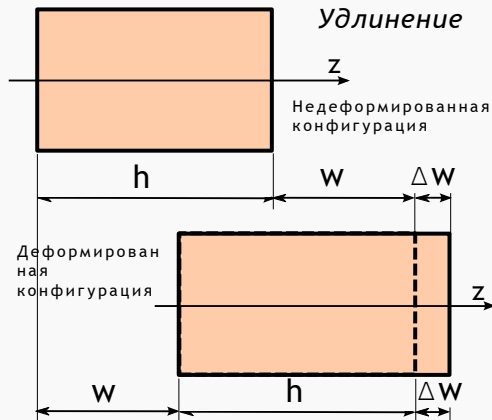
Продольная деформация (удлинение)

Деформация ϵ_0 – это отношение между его удлинением и первоначальной длиной

$$\epsilon_0 = \frac{\Delta w}{h}$$

Учитывая изменчивость w вдоль z :

$$\begin{aligned}\epsilon_0(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta w(z)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(z+h) - w(z)}{h} &= \\ w'(z) &= \frac{dw(z)}{dz}\end{aligned}$$



Смещение вдоль y задается суммой деформации

- деформация сдвига γ
- жесткое вращение ϕ
- кривизна χ

Деформация сдвига и вращение

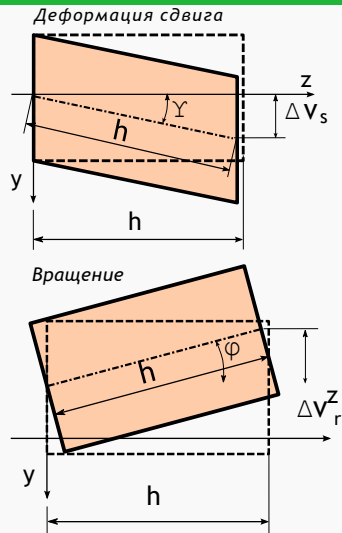
Деформация сдвига :

$$\Delta v_s = h \sin \gamma$$

Жесткое вращение:

$$\Delta v_r = - h \sin \phi$$

(смещение Δv_r должно быть отрицательным, когда ϕ положительное, т.е. против часовой стрелки)

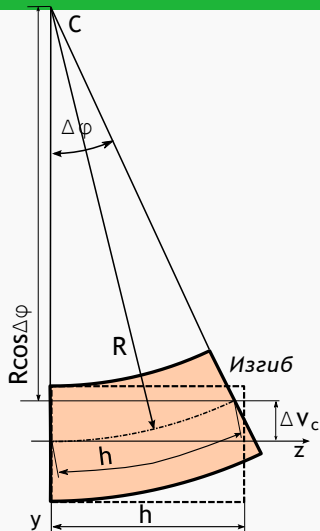


Изгибание (поперечные сечения остаются плоскими и неискаженными, так что ϵ_0 является **линейным**):

$$\begin{aligned} \Delta v_c &= -[R - R \cos(\Delta\varphi)] = \\ &= -\frac{1 - \cos(\chi h)}{\chi} \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\varphi}{h}, \quad R \Delta\varphi = h$$

($\chi = 1/R$ представляет собой **изгиб**)



Изгиб и деформация поперечного сечения

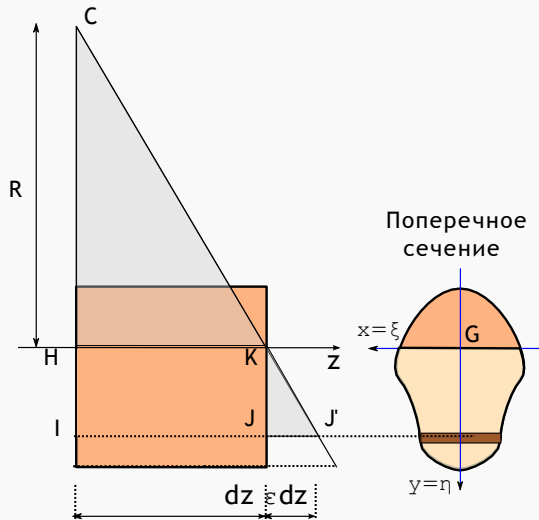
$$\frac{\overline{JJ'}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{CH}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{\varepsilon dz}{y} = \frac{dz}{R}$$

$$\varepsilon(y) = \frac{y}{R} = \chi y$$

Обратите внимание, что ε_0 использовалось для обозначения $\varepsilon(y = 0, z)$, т.е. деформации продольной оси z . Из-за кривизны ε **изменяется** в поперечном сечении!

Вся деформация - это:

$$\varepsilon(y, z) = \underbrace{\varepsilon_0(z)}_{\text{Продольный}} + \underbrace{\chi y}_{\text{Изгиб}}$$



Добавление предыдущих трех вкладов:

$$\Delta v = \Delta v_s + \Delta v_r + \Delta v_c = h \sin \gamma - h \sin \varphi - \frac{1 - \cos(\chi h)}{\chi}$$

и, используя лимит:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta v(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \gamma(z)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin \varphi(z)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\chi(z) h)}{\chi(z) h} \\ &= \sin \gamma(z) - \sin \varphi(z) - 0 = \sin \gamma(z) - \sin \varphi(z) = v'(z) = \frac{dv(z)}{dz} \end{aligned}$$

Правило Опиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{1} = 0$$

Бесконечно малые перемещения и вращения

Для бесконечно малых перемещений и вращений, таких, что $\sin \gamma \approx \gamma$ и $\sin \phi \approx \phi$, является:

$$v'(z) = -\sin \varphi(z) + \sin \gamma(z)$$

это получается:

$$v'(z) = \gamma(z) - \varphi(z) \quad \text{т.е.,}$$

$$\gamma(z) = v'(z) + \varphi(z) = \frac{dv(z)}{dz} + \varphi(z)$$

Кривизна $\chi(z)$ теперь равна:

$$\chi(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} = \varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Соотношение между w , v , ϕ и ε_0 , γ , χ :

$$\varepsilon_0(z) = \frac{dw(z)}{dz}$$

$$\gamma(z) = \frac{dv(z)}{dz} + \varphi(z)$$

$$\chi(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

Модели Тимошенко и Эйлера-Бернулли (упрощенные)

$\gamma(z) \neq 0$: модель [Тимошенко](#)

$\gamma(z) = 0$: модель [Эйлера-Бернулли](#), т. е. $\varphi(z) = -\frac{dv(z)}{dz}$

Однородность измерений

Базовые величины: сила (F), длина (L) и масса (M)

Любое физически значимое уравнение будет иметь одинаковые размеры с левой и правой сторон (**однородность размеров**)

Количество	Физическое значение	Единица СИ
$\varepsilon, \varepsilon_0, \gamma$	–	–
χ	L^{-1}	m^{-1}
V, W	L	m
φ	–	rad

Знаки

- v, w : положительный, если направлен вдоль положительного направления (y, z) , соответственно
- $\varepsilon, \varepsilon_0$: положительный, если направлен вдоль положительного направления z
- ϕ : положительный, если против часовой стрелки
- χ : положительный, если вогнутость кривой обращена влево от z

Система координат (правосторонняя система)

1. Держа руку плоской, направьте пальцы в направлении X .
2. Согните все пальцы, кроме указательного, так, чтобы они указывали в направлении Y .
3. Поднимите большой палец. Это Z .

