Краткая математическая теория

Строительная механика

Проект ERAMCA

Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии

v2o22317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia

Оглавление

Цели преподавателя/студентов

Цели преподавателя/студентов

- Представить некоторые математические инструменты, которые используются в курсе.
- Убедить класс пересмотреть их как можно скорее!

Введение

Введение

Цель лекции – повторить некоторые темы, полезные для курса.

Операции с матрицами (1/4)

- Сумма/разница $C = A \pm B$. Условия C задаются:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

  Размеры A и B должны быть одинаковыми.

- Продукт $C = AB$.

  Условия C задаются:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}$$

  Оно имеет смысл только в том случае, если количество столбцов в A равно количеству строк в B (т. е. $\underset{(q\times p)}{C} = \underset{(q\times m)}{A}\underset{(m\times p)}{B}$).

  Умножение матриц не коммутативно, как в обычной алгебре (т. е. $AB \neq BA$)!

Операции с матрицами

- Транспонировать $\boldsymbol{A}$.

  Транспонирование A^T получается заменой строк и столбцов матрицы A. Если $A = A^T$, квадратная матрица A симметрична. В случае продукта это $(AB)^T = B^T A^T$. Определитель a = det A of A (только квадратная матрица):

$$a = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

где:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{если } ijk \text{ появляется в последовательности } 12312 \\ -1 & \text{в последовательности } 32132 \\ 0 & \text{если в любой другой последовательности} \end{cases}$$

Если det$\boldsymbol{A}$ = 0, матрица $\boldsymbol{A}$ сингулярна.

- Инверсия A^{-1} для A (только квадратная матрица).
- Матрица A^{-1} такова, что:

$$AA^{-1} = I$$

где I – единичная матрица, имеющая нуль на всех недиагональных позициях и единицу на каждой из диагональных позиций.

Это полезно для решений линейных систем уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Если $A^{-1} = A^T$, матрица A называется ортогональной.

Процедура обращения требует соответствующих численных процедур (например, метода [Холецкого]).

Операции с матрицами (4/4)

- Собственные значения λ_i симметричной матрицы $\boldsymbol{A}$ ($n \times n$):

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0} \quad \text{где} \quad \det|\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}| = 0$$

$\boldsymbol{\Phi}_i$ представляет собой собственный вектор, связанный с собственным значением λi. Имеется n таких собственных значений λi, каждому из которых соответствует собственный вектор $\boldsymbol{\Phi}_i$.

Можно показать, что такие векторы ортонормированы

$(\boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i = \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = 1 \text{ if } i = j, 0 \text{ if } i \neq j)$

Физический смысл состоит в том, чтобы найти вектор **АФ**, параллельный вектору **Ф**.

В строительной механике…

. . . матрицы используются для описания напряженно-деформированного состояния; собственные значения для нахождения главных напряжений и деформаций

Векторы

Векторы (1/2)

Вектор — это отрезок с ориентацией, т. е. отрезок со стрелкой на одном из его концов, описываемый через:

- модуль: длина вектора (представляющая в определенном масштабе количество)
- азимут: идентифицированный пучок линий, параллельных той, на которую ложится вектор
- направление: обозначено стрелкой

Единичный вектор – это вектор с модулем, равным 1.

Векторы используются для представления…

. . . положения точек, силы, скорости и перемещения в трехмерном пространстве

Три взаимно ортогональных единичных вектора (например, *i*, *j* и *k*), примененные в точке O, т.е. в начале координат 3D–пространства, представляют собой **базу**.

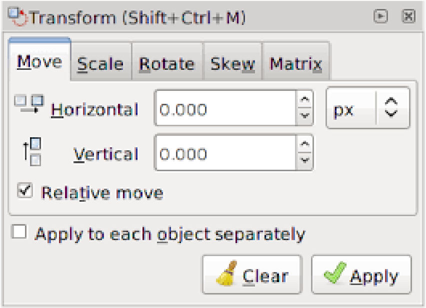
Любой общий вектор *u* может быть выражен как $u = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$, где u_x, u_y, u_z – **компоненты** вектора.

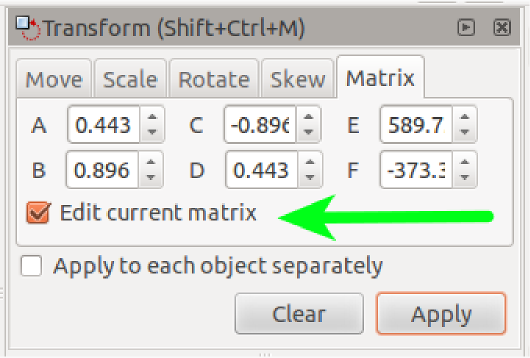
Вектор, нанесенный в O, с кончиком стрелки в P. . .

...может иметь различные математические представления:

$$\overrightarrow{OP} = (P - O) = \vec{u} = \{u\} = \underline{u} = \boldsymbol{u} = \{u_x, u_y, u_z\} == \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

Векторы: современный способ их использования?





- Сумма/разность $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}$.

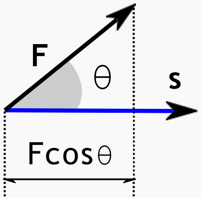
$$\boldsymbol{c} = (a_x \pm b_x)\boldsymbol{i} + (a_y \pm b_y)\boldsymbol{j} + (a_z \pm b_z)\boldsymbol{k}$$

  Размеры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть идентичными.
  Сумма может быть вычислена геометрически (закон параллелограмма).

- Длина (или модуль) $\boldsymbol{u}$.

$$u = ||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\sum_i u_i^2} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

- Точечный продукт (символ “·”).
  Связывает два вектора, например, ***F*** и ***s***, со скалярной величиной *a*:



$$a = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = ||\mathbf{F}||\ ||\mathbf{s}||\ \cos\vartheta = F s\ \cos\vartheta$$

где $F = ||\mathbf{F}||$ представляет модуль ***F***, $s = ||\mathbf{s}||$ модуль ***s*** и ϑ угол между ***F*** и ***s***.

Для вычисления используется точечное произведение…

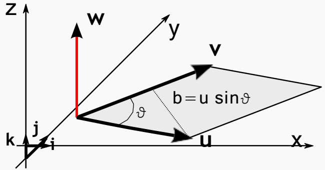
…работа, выполняемая силой

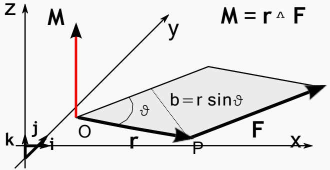
- Кросс–продукт (символ “∧”).

  Связывает два вектора $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ с третьим вектором $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, ортогональным $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ (следуя правилу соглашения с правой стороны), по модулю:

$$||\boldsymbol{w}|| = ||\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}|| \sin\vartheta = v\,u \sin\vartheta = v\,b$$

Угол между $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ равен $\sin\vartheta = \dfrac{||\boldsymbol{w}||}{||\boldsymbol{u}||\,||\boldsymbol{v}||}$





Обратите внимание, что…

… $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \;/\!= \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$; это $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = - \;\; \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}$

Для расчета используется кросс-произведение...

. . . **момент** силы относительно полюса O ($\boldsymbol{r}$ связывает O с P), модуль которого равен:

$$||\boldsymbol{M}|| = M = ||\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}|| = ||\boldsymbol{r}||\,||\boldsymbol{F}|| \sin\vartheta = r\,F \sin\vartheta = F\,b$$

где b – **плечо рычага**, т.е. расстояние, **ортогональное** $\boldsymbol{F}$ относительно полюса O

Перекрестный продукт также может быть записан как:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

то есть,

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}(u_y v_z - u_z v_y) - \boldsymbol{j}(u_x v_z - u_z v_x) + \boldsymbol{k}(u_x v_y - u_y v_x)$$

Пример: перекрестный продукт (1/2)

Найдите момент $\boldsymbol{F} = \{2, 3, 0\}$, примененный в P(3,2,0), относительно начала координат (i.e., $\boldsymbol{r} = \{3, 2, 0\}$).

Решение.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

так что

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{i}(2 \times 0 - 0 \times 3) - \boldsymbol{j}(3 \times 0 - 0 \times 2) + \boldsymbol{k}(3 \times 3 - 2 \times 2) = 5\boldsymbol{k}$$

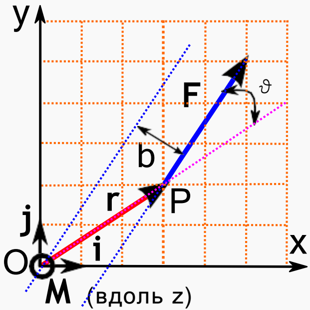
Это означает, что момент $\boldsymbol{F}$ - это вектор, направленный к оси z с модулем, равным 5.

Угол между ***r*** и ***F*** равен:

$$\sin\vartheta = \frac{||\boldsymbol{M}||}{||\boldsymbol{r}||\ ||\boldsymbol{F}||} = \frac{5}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}} = \frac{5}{13} \quad \text{т.е.,} \quad \vartheta \approx 22.6^\circ$$

Плечо ***F*** относительно начала координат осей равно:

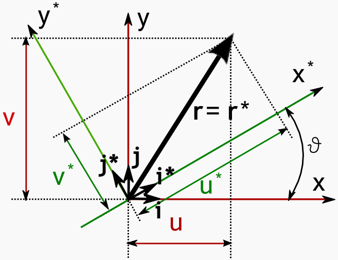
$$b = \sqrt{13}\ \sin 22.6^\circ = 1.39$$



Вращение системы координат

Вращение системы координат превращает компоненты $\{u, v\}$ вектора, обозначаемого как $\boldsymbol{r}$ в системе координат (x, y), в $\{u^*, v^*\}$, т.е. компоненты одного и того же вектора во вращающейся системе координат (x^*, y^*) (обозначаетсяВращение системы координат превращает компоненты {u, v} вектора, обозначаемого как $\boldsymbol{r}^*$ в системе координат:

$$\boldsymbol{r}^* = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$



то есть $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{N}\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{N}$ – ортогональная матрица $(\boldsymbol{N}^T = \boldsymbol{N}^{-1})$ которая не изменяет длину вектора:

$$||\boldsymbol{r}^*|| = \sqrt{(u^*)^2 + (v^*)^2} = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Пример: вращение системы координат

Найдите компоненты вектора $\boldsymbol{a} = \{3, -1\}$ в новом формате, повернутом на $\pi/6$ против часовой стрелки.

Решение. Матрица $\boldsymbol{N}$ задается как:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

так что:

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ -\frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} +2.1 \\ -2.4 \end{bmatrix}$$

Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение – это математическое уравнение, которое связывает некоторую функцию с ее производными.

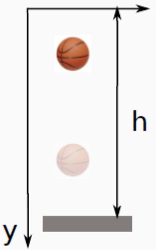
В качестве примера рассматривается вертикальное движение падающего объекта (однородное гравитационное поле без сопротивления воздуха):

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = +g$$

$$\mathrm{d}v(t) = +g\,\mathrm{d}t$$

$$\int \mathrm{d}v(t) = \int g\,\mathrm{d}t + C_1 = g\int \mathrm{d}t + C_1$$

$$v(t) = g\,t + C_1$$



Дифференциальные уравнения - классический пример (2/3)

Это также:

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = g\,t + C_1$$

$$dy(t) = (g\,t + C_1)\,dt$$

$$\int dy(t) = \int (g\,t + C_1)\,dt + C_2$$

$$y(t) = \frac{1}{2} g\,t^2 + C_1 t + C_2$$

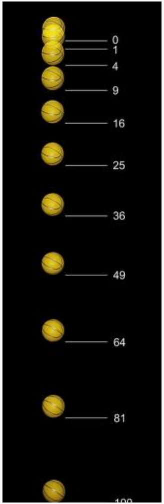
где g – ускорение, обусловленное силой тяжести (9,81 m/s^2 вблизи поверхности земли.

Дифференциальные уравнения - классический пример (3/3)

Граничными условиями являются $v(0) = 0$ и $y(0) = 0$, так что $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно:

$$v(t) = gt$$

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$



Скорость объекта после падения с высоты h равна:

$$v(h) = \sqrt{2\,g\,h}$$

в то время как время t для прохождения расстояния h:

$$t_h = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$