

ТЕОРИЯ БАЛКИ - Механическое напряжение

Строительная механика

Проект ERAMCA

[Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии](#)

v2o22317

Эта работа находится под лицензией [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#).



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Цели преподавателя/студентов

Введение

Осевая нагрузка

Изгиб

Эксцентричная осевая нагрузка

Цели преподавателя/студентов



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia



Представить расчет нормальных напряжений для балок.



Чтобы понять гипотезы, различать различные условия загрузки и применять правильные решения.

Введение



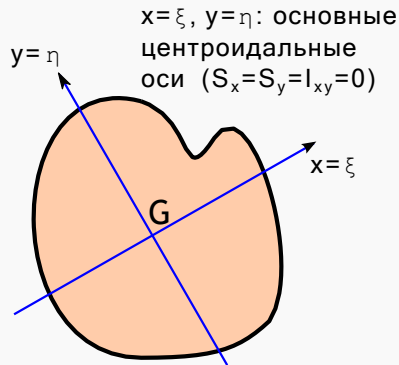
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

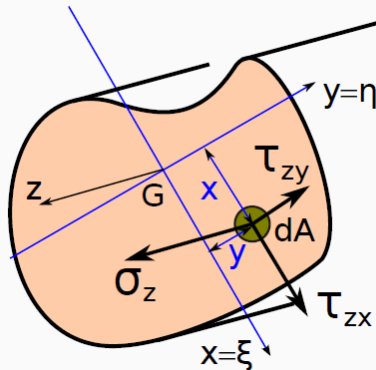
На протяжении всех слайдов...

...используются **главные центроидальные оси**,
обозначенные как (x, y) вместо (ξ, η) !



Эквивалентность между напряжениями и внутренними силами

$$\begin{aligned}N_z &= \int_A \sigma_z dA \\T_x &= \int_A \tau_{zx} dA \\T_y &= \int_A \tau_{zy} dA \\M_x &= \int_A \sigma_z y dA \\M_y &= - \int_A \sigma_z x dA \\M_z &= \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA\end{aligned}$$



Осевая нагрузка



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Храм Агридженто

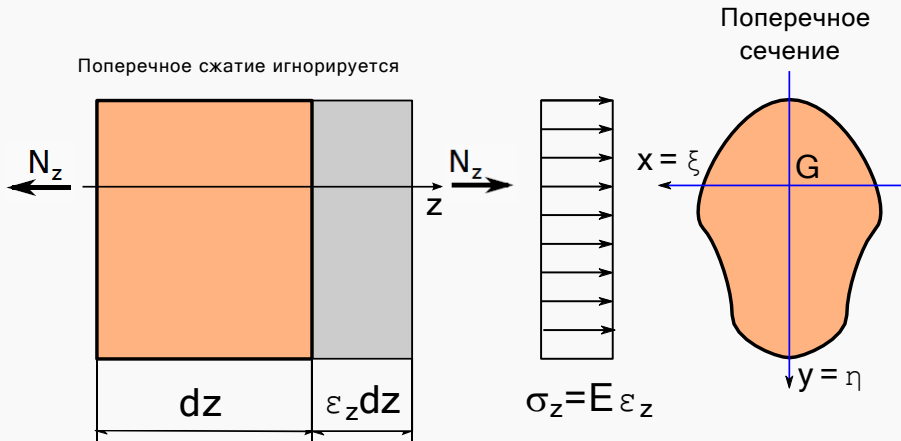


Осевая нагрузка - натяжение

Мост Аламильо



Осевая нагрузка - модель для напряжений



Осевая нагрузка - расчет напряжений

Каждое поперечное сечение остается плоским и неискаженным: ε_z **равномерное** $\Rightarrow \sigma_z$ **равномерное** ($\sigma_z = E\varepsilon_z$). Это:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \frac{N_z}{EA}$$

так что:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{N_z}{EA} = \frac{N_z}{A}$$

Оси являются центроидальными ($S_x = S_y = 0$) и главными ($I_{xy} = 0$):

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \frac{N_z}{A} y dA = \frac{N_z}{A} \int_A y dA = c S_x = 0$$

$$-M_y = \int_A \sigma_z x dA = \int_A \frac{N_z}{A} x dA = \frac{N_z}{A} \int_A x dA = c S_y = 0$$

Изгиб



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

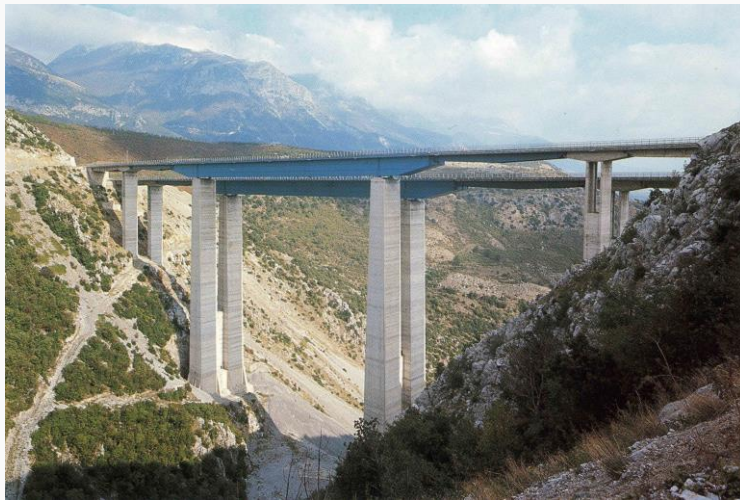


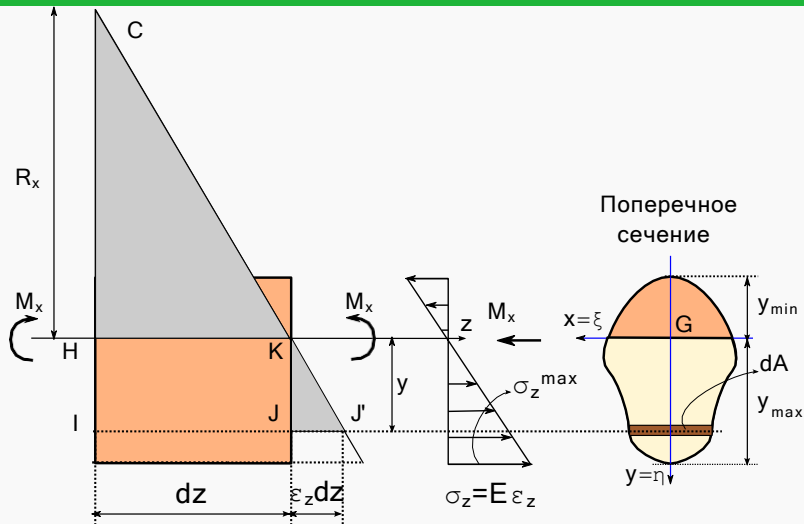
Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia





Мост Раго





Поперечные сечения остаются плоскими и не искаженными (ϵ_z **линейными**):

$$\frac{\overline{JJ'}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{CH}} \quad \text{т.е.} \quad \frac{\epsilon_z dz}{y} = \frac{dz}{R_x} \quad \epsilon_z = \frac{y}{R_x} = \chi_x y$$

Кривизна равна $\chi_x = \frac{1}{R_x} = \frac{M_x}{EI_x}$ так что:

$$\sigma_z = E\epsilon_z = E\chi_x y = E \frac{M_x}{EI_x} y = \frac{M_x}{I_x} y \quad (\text{Формула } \text{Навье})$$

В дополнение...

$$N_z = \int_A \sigma_z dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y dA = \frac{M_x}{I_x} \int_A y dA = \frac{M_x}{I_x} S_x = 0$$

$$-M_y = \int_A \sigma_z x dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y x dA = \frac{M_x}{I_x} \int_A xy dA = \frac{M_x}{I_x} I_{xy} = 0$$

Симметричная поверхность, нейтральная к изгибу

Напряжение равно $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$. **Нейтральная поверхность** – это поверхность, на которой напряжение σ_z равно нулю:

$$\text{Нейтральная поверхность: } \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = 0 \implies y = 0$$

Линия $y = 0$ представляет собой нейтральную ось для симметричного изгиба.

Симметричные модули упругого сечения при изгибе

Максимальное напряжение σ_z^{max} возникает сверху и снизу:

$$\sigma_z^{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$$

где $W_x = \frac{I_x}{y_{max}}$ представляет **модуль упругого сечения** относительно x , а y_{max} расстояние между нейтральной поверхностью и точкой, наиболее удаленной от нее. Это геометрическое свойство поперечного сечения, такое как площадь, центростид и моменты площади.

Например, для прямоугольного поперечного сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{max}} = \frac{\frac{hb^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6}$$

в то время как для двутавровой балки IPE 200 (глубина $h_{IPE}=200$ мм, фланец $b_{IPE}=100$ мм):

$$W_x = \frac{I_x}{\frac{h_{IPE}}{2}} = \frac{1943.0 \text{ cm}^4}{\frac{20.0 \text{ cm}}{2}} = 194.3 \text{ cm}^3, \quad W_y = \frac{I_y}{\frac{b_{IPE}}{2}} = \frac{142.0 \text{ cm}^4}{\frac{10.0 \text{ cm}}{2}} = 28.5 \text{ cm}^3.$$

Симметричный изгиб - пример

Стальная балка IPE 200 длиной 6 м с простой опорой (I-образное поперечное сечение) должна выдерживать собственный вес, равный $q_0 = 220 \text{ N/m}$. Определите величину максимального нормального напряжения, возникающего при изгибе.

Ответ. Максимальный изгибающий момент в середине балки составляет:

$$M_{max} = \frac{1}{8} q_0 L^2 = \frac{1}{8} \times (0.22 \text{ N/mm}) \times (6000 \text{ mm})^2 = 9.9 \times 10^5 \text{ Nmm}$$

максимальное нормальное напряжение в середине балки:

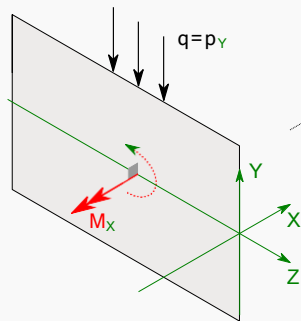
$$\sigma_z^{max} = \frac{M_x}{I_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{9.9 \times 10^5 \text{ Nmm}}{1.943 \times 10^5 \text{ mm}^3} = 5.1 \text{ MPa}$$

Если допустимое напряжение составляет $f_{yd} = 220 \text{ MPa}$, то конструкция является приемлемой. Собственный вес составляет около 2% от допустимого напряжения.

Несимметричный изгиб - модель

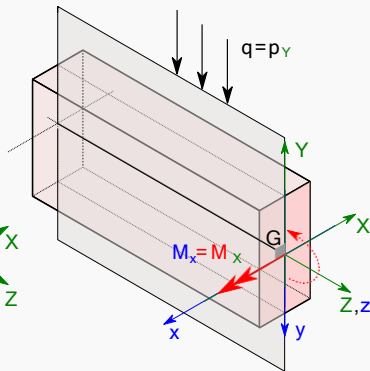


Несимметричный изгиб - еще несколько деталей



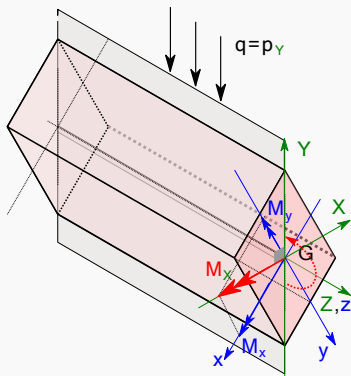
Плоскость нагрузки
(вертикальная)

Y вертикальный



Плоскость нагрузки
(вертикальная)

Y и y оба вертикальные

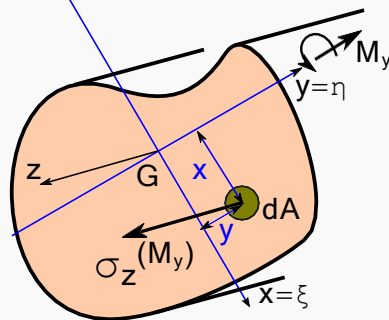
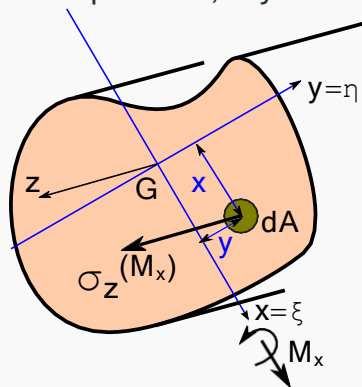


Плоскость нагрузки (вертикальная)

Y вертикальный, но y не
выровненный

Повернутое прямоугольное сечение; следите за рамкой отсчета (см. Г-образное сечение)

Несимметричный изгиб: момент $\mathbf{M}$ не выровнен с одной из главных центроидальных осей. Напряжение σ_z получается путем суперпозиции, сложения напряжений, обусловленных M_x и M_y ($\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}$).



Суперпозиция : $\sigma_z = \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$

$$\sigma_z^{(M_x)} = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \sigma_z^{(M_y)} = - \frac{M_y}{I_y} x$$

Отрицательный знак во втором уравнении...

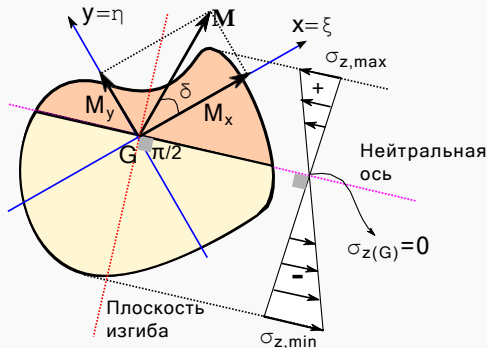
... если из-за того, что M_y положительный вызывает натяжение в части поперечного сечения, где x отрицательный

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (M_x = M \cos \delta, \quad M_y = M \sin \delta)$$

Нейтральная ось ($\sigma_z = 0$) : $\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$

Несимметричные изгибные напряжения и нейтральная поверхность

- Нейтральная ось представлена линией, проходящей через центр тяжести G , уравнение $\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x = 0$
- Величина напряжения пропорциональна расстоянию от нейтральной оси
- Наиболее напряженные точки – это те, которые находятся дальше всего от нейтральной оси



Двутавровая балка IPE 200, фланец которой образует угол, равный 25° градусам от горизонтали, подвергается воздействию пары 10 kNm, действующих в вертикальной плоскости. Найдите напряжение внутри балки.

Ответ. Изгибающие моменты M_x и M_y являются:

$$M_x = +M \cos 25^\circ = +(10 \text{ kNm})(\cos 25^\circ) = +9.06 \text{ kNm}$$

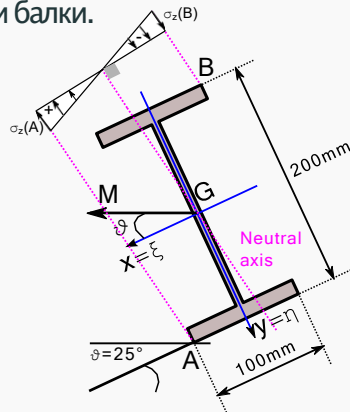
$$M_y = -M \sin 25^\circ = -(10 \text{ kNm})(\sin 25^\circ) = -4.23 \text{ kNm}$$

Напряжение σ_z определяется по:

$$\sigma_z = \frac{+9.06 \times 10^6 \text{ Nmm}}{1.943 \times 10^7 \text{ mm}^4} y - \frac{-4.23 \times 10^6 \text{ Nmm}}{1.420 \times 10^6 \text{ mm}^4} x =$$

$$(0.466 \text{ N/mm}^3) y + (2.98 \text{ N/mm}^3) x$$

Уравнение нейтральной оси имеет вид:



Напряжения в точках А и В (наиболее удаленные от нейтральной оси) равны:

$$\sigma_z^{(A)} = (0.466 \text{ N/mm}^3) \left(\frac{+200 \text{ mm}}{2} \right) + (2.98 \text{ N/mm}^3) \left(\frac{+100 \text{ mm}}{2} \right) = +196 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z^{(B)} = (0.466 \text{ N/mm}^3) \left(\frac{-200 \text{ mm}}{2} \right) + (2.98 \text{ N/mm}^3) \left(\frac{-100 \text{ mm}}{2} \right) = -196 \text{ MPa}$$

С углом, равным 0° (симметричный изгиб):

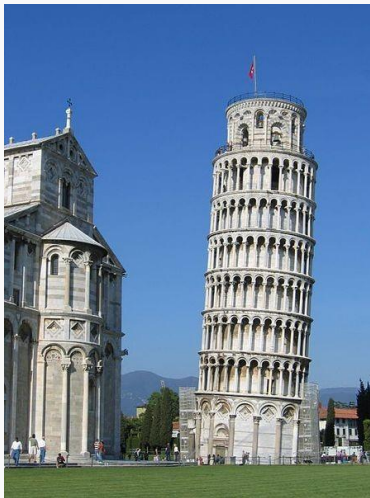
$$\sigma_z^{(A)} = \frac{+10 \times 10^6 \text{ Nmm}}{1.943 \times 10^7 \text{ mm}^4} \left(\frac{+200 \text{ mm}}{2} \right) = +52 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z^{(B)} = \frac{+10 \times 10^6 \text{ Nmm}}{1.943 \times 10^7 \text{ mm}^4} \left(\frac{-200 \text{ mm}}{2} \right) = -52 \text{ MPa}$$

найденное напряжение $\approx 1/4$ по отношению к значению для несимметричного изгиба!

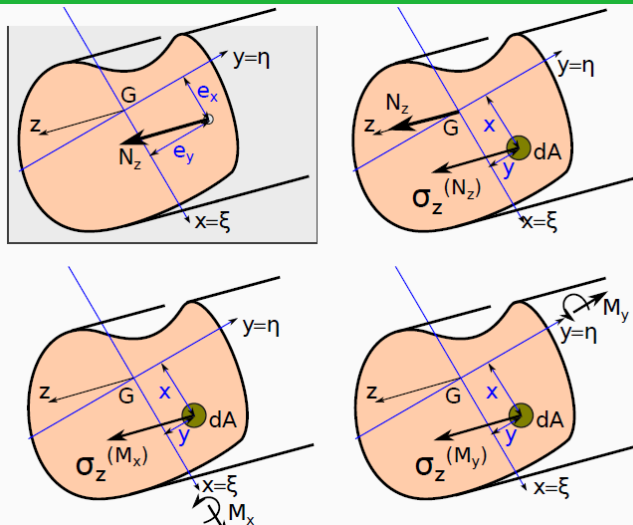
Эксцентричная осевая нагрузка

Пизанская башня



Эксцентричная осевая нагрузка и сдвиг





Эксцентричная осевая нагрузка N_z , приложенная в точке координат (e_x, e_y) , эквивалентна системе, заданной эксцентрической осевой нагрузкой, приложенной в G , и двумя моментами $M_x = N_z e_y$, $M_y = -N_z e_x$

Суперпозиция: $\sigma_z = \sigma_z^{(N_z)} + \sigma_z^{(M_x)} + \sigma_z^{(M_y)}$

$$\sigma_z^{(N_z)} = \frac{N_z}{A}, \quad \sigma_z^{(M_x)} = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \sigma_z^{(M_y)} = -\frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

Отрицательный знак в третьем уравнении...

... если из-за того, что M_y положительный вызывает натяжение в той части поперечного сечения, где x отрицательный

Путем группировки N_z/A получается:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \left(1 + \frac{Ae_y}{I_x} y + \frac{Ae_x}{I_y} x \right) = \frac{N_z}{A} \left(1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x \right)$$

где ρ_x и ρ_y представляют **радиус вращения**:

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A}, \quad \rho_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

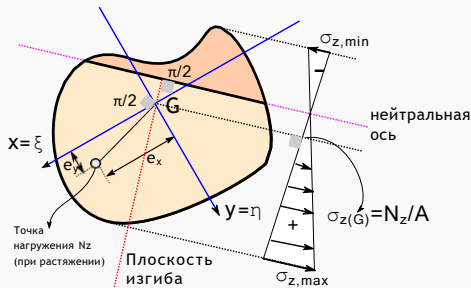
Нейтральная поверхность получается при установке $\sigma_z = 0$:

$$1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x = 0$$

Нейтральная ось (уравнение прямой линии) не зависит от величины N_z , но зависит от ее положения и геометрических свойств поперечного сечения

Эксцентричная осевая нагрузка - нейтральная поверхность

- Нейтральная ось представлена прямой линией, которая не **совпадает** с центроидной осью сечения; ее уравнение равно $1 + \frac{e_y}{\rho_x^2} y + \frac{e_x}{\rho_y^2} x = 0$
- Величина напряжения пропорциональна расстоянию от нейтральной оси, значение, соответствующее центроиду, равному $\frac{N_z}{A}$
- Наиболее напряженные точки – это те, которые находятся дальше всего от нейтральной оси



Эксцентричная осевая нагрузка - пример

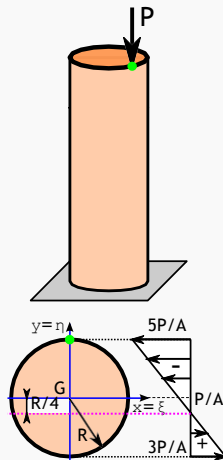
Стержень с круглым поперечным сечением (радиус R) подвергается нормальным сжимающим силам. Найдите максимальное и минимальное напряжение.

Ответ. Нагрузка производит $M_x = N_z e_y = (-P)(+R) = -PR$ и $M_y = -N_z e_x = -(-P)(0) = 0$ (P абсолютное значение):

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-P}{\pi R^2} + \frac{-PR}{\frac{\pi R^4}{4}} y = -\frac{P}{\pi R^2} \left(1 + \frac{4}{R} y \right)$$

Нейтральная ось равна $y = \frac{R}{4}$, в то время как напряжения равны:

$$\sigma_z(+R) = -\frac{P}{\pi R^2} \left[1 + \frac{4}{R} (+R) \right] = -5 \frac{P}{\pi R^2} = -5 \frac{P}{A}$$
$$\sigma_z(-R) = -\frac{P}{\pi R^2} \left[1 + \frac{4}{R} (-R) \right] = +3 \frac{P}{\pi R^2} = +3 \frac{P}{A}$$



- Нормальная сила N_z **положительна**, если натяжение; моменты M_j , действующие на положительную грань (положительная “грань” перпендикулярна направлению положительной оси), если вдоль соответствующей оси (j означает ось x или y).
- Нормальное напряжение σ_z является **положительным**, если оно вызывает растяжение.