ТЕОРИЯ БАЛКИ - Геометрические свойства поперечного сечения

Строительная механика

Проект ERAMCA

Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии

v2o22317

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia

Содержание

Цели преподавателя/студентов

Цели преподавателя/студентов

- Представить математический инструмент, необходимый для оценки влияния поперечного сечения на напряжение и деформацию балок.
- Изучить процедуры, необходимые для расчета геометрических свойств плоских областей (центроид, первый и второй моменты, главные оси). Применить процедуру к плоским областям, составленным из элементарных фигур.

Введение

Введение

Геометрия плоских участков исследуется для получения некоторых свойств, полезных для расчета прогиба и напряжений в балках

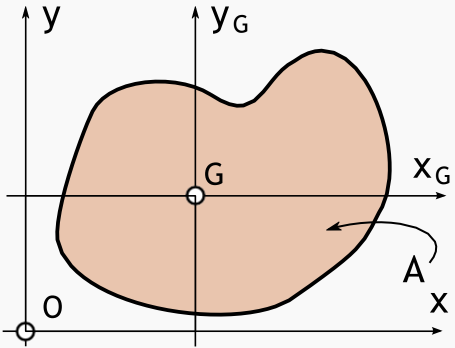
В теории балок…

. . требуются значения жесткости $E\,A$ (осевая) и $EI = E\,I_x$ (изгибная): термин A представляет площадь поперечного сечения, а $I = I_x$ – момент инерции относительно главной оси центроида (далее обозначается I_ξ).

Центроид, первый и второй моменты площади

Первые моменты площадей S_x и S_y вычисляются как:

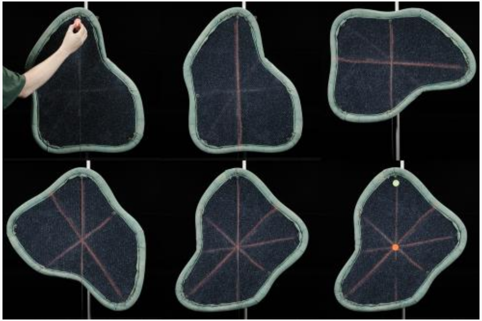
$$A = \int_A dA$$
$$S_x = \int_A y dA$$
$$S_y = \int_A x dA$$



в то время как центроид G как:

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x dA}{A}$$
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y dA}{A}$$

Первые моменты площади и центроида G (2/2)



- <u>Центроид</u> – это точка области, относительно которой оба первых момента области равны нулю.
- Первые моменты области равны нулю для любой пары центроидных осей
- Первые моменты могут быть положительными, отрицательными или нулевыми; область A всегда положительна

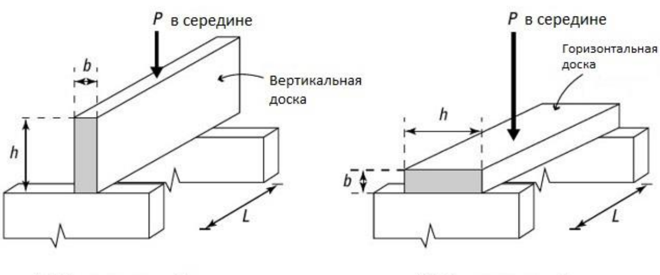
Вторые моменты этого района

Вторыми моментами площади
или моментами инерции
являются

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$



(a) Меньше прогиба
($h > b$)

(b) Больше прогиба
($h > b$)

- I_{xx} и I_{yy} всегда больше нуля
- I_{xy} (смешанный момент инерции) может быть положительным, отрицательным или нулевым

Теоремы о параллельных осях

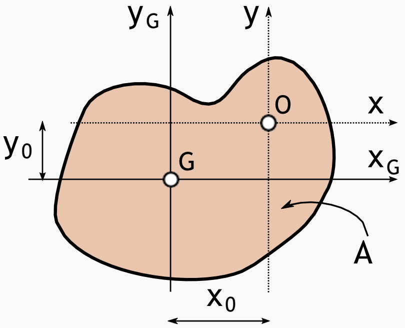
Теоремы о параллельных осях

Момент инерции площади относительно заданной оси задается формулой:

$$I_{xx} = I_{x_G x_G} + A\, y_o^2$$

$$I_{yy} = I_{y_G y_G} + A\, x_o^2$$

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + A\, x_o y_o$$



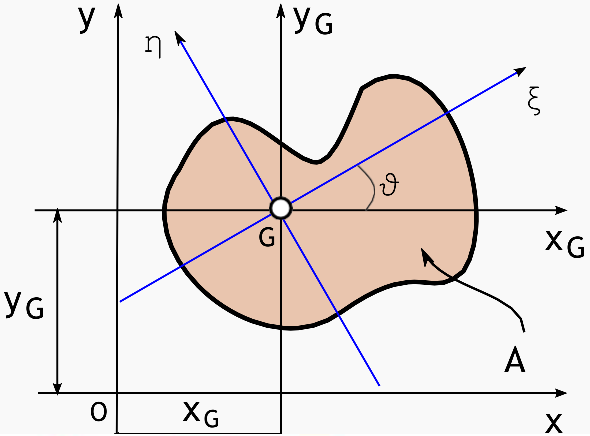
(Формулы Гюйгенса (Huygens))

Моменты инерции $I_{x_G x_G}$ и $I_{y_G y_G}$ . . .

. . . являются наименьшими из всех возможных пар осей, параллельных исходным

Основные оси

Можно найти пару осей, в которые $I_{\xi\eta} = 0$ (главные оси), которые повернуты примерно на ϑ (положительно, если против часовой стрелки) относительно центральных



Основные оси

- Ориентация основных осей (ξ, η)

$$\vartheta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\,I_{x_G y_G}}{I_{y_G y_G} - I_{x_G x_G}}$$

- Моменты инерции относительно основных осей (I_ξ,I_η):

$$I_\xi\,,\,I_\eta = \frac{1}{2}(I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{y_G y_G} - I_{x_G x_G})^2 + 4\,I_{x_G y_G}{}^2}$$

выбирая I_ξ, I_η таким образом, чтобы:

- $I_\xi > I_\eta$ если $I_{x_G x_G} > I_{y_G y_G}$
- $I_\xi < I_\eta$ если $I_{x_G x_G} < I_{y_G y_G}$

- Если $I_{x_G x_G} = I_{y_G y_G}$ это:

$$\vartheta = +\frac{\pi}{4} \quad \text{and} \quad I_\xi = I_{x_G x_G} - I_{x_G y_G}, \quad I_\eta = I_{x_G x_G} + I_{x_G y_G}$$

Примечание

- По главным осям $I_{\xi\eta} = 0$
- I_ξ и I_η всегда больше нуля
- Оси как центроидные, так и главные: центральная

Простые сечения

Прямоугольное поперечное сечение (1/2)

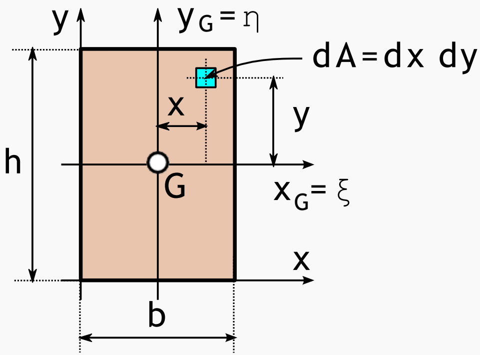
$$A = \int_A dA = \int_0^b \int_0^h dxdy = b\,h$$

$$S_x = \int_A y\,dA = \int_0^b \int_0^h y\,dxdy = +\frac{b\,h^2}{2}$$

$$S_y = \int_A x\,dA = \int_0^b \int_0^h x\,dxdy = +\frac{h\,b^2}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{+\frac{h\,b^2}{2}}{b\,h} = +\frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{+\frac{b\,h^2}{2}}{b\,h} = +\frac{h}{2}$$



Прямоугольное поперечное сечение (2/2)

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA = \int_0^b \int_0^h y^2 dxdy = \frac{b\,h^3}{3}$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 dA = \int_0^b \int_0^h x^2 dxdy = \frac{h\,b^3}{3}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b \int_0^h xy dxdy = +\frac{b^2\,h^2}{4}$$

$$I_{x_G x_G} = I_{xx} - A\,{y_G}^2 = \frac{b\,h^3}{3} - (bh)\left(+\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b\,h^3}{12}$$

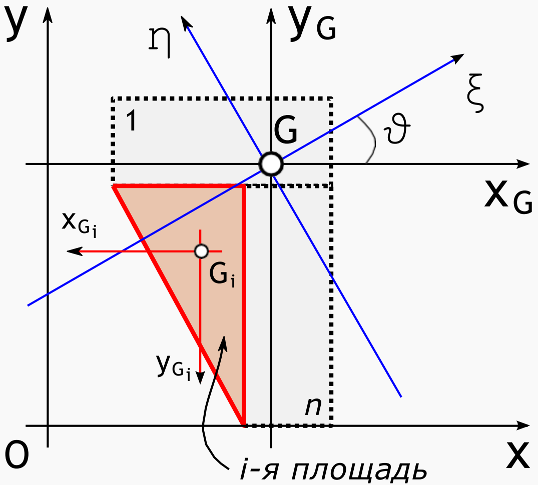
$$I_{y_G y_G} = I_{yy} - A\,{x_G}^2 = \frac{h\,b^3}{3} - (bh)\left(+\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - A\,x_G y_G = +\frac{b^2\,h^2}{4} - (bh)\left(+\frac{b}{2}\right)\left(+\frac{h}{2}\right) = 0$$

Прямоугольное поперечное сечение вдвойне симметрично

Составные площади

Главные оси для составных областей (1/3)

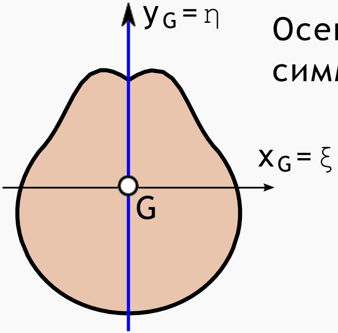


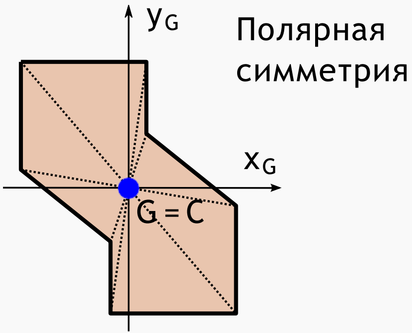
Главные оси для составных областей (2/3)

- Разделить площадь на n простых фигур (геометрические свойства которых известны из таблиц)
- Вычислить общую площадь (суммируя n элементарных площадей)
- Вычислить общие первые моменты (суммируя первые моменты *n* элементарных областей, учитывая знаки) относительно произвольного набора осей (x, y)
- Определить положение центра тяжести

- Вычислить полные моменты инерции (суммируя моменты инерции *n* элементарных областей), помня, что:
  - теорема о параллельной оси должна использоваться для того, чтобы отнести все моменты инерции к глобальным осям центроида (x_G,y_G); в таблицах m.o.i. связаны с локальными центроидами элементарных областей (x_{G_i},y_{G_i})
  - смешанный момент инерции i–й области зависит от направления осей. Таким образом, необходимо контролировать направления локальных осей x_{G_i},y_{G_i} относительно глобальных осей x_G,y_G
- Вычислите ориентацию главных осей (ϑ) и моменты инерции, связанные с главными осями (I_ξ и I_η)

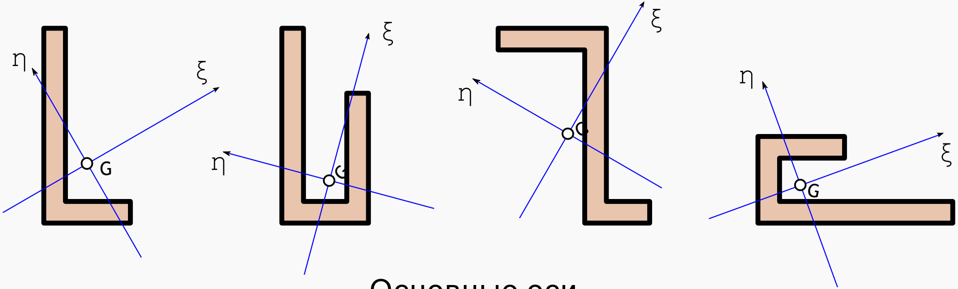
Особые симметрии





- Осевая симметрия: центр тяжести находится на оси симметрии, и одна из главных осей совпадает с осью симметрии. Другой перпендикулярен
- Полярная симметрия: центроид G совпадает с центром области C

Будьте осторожны…

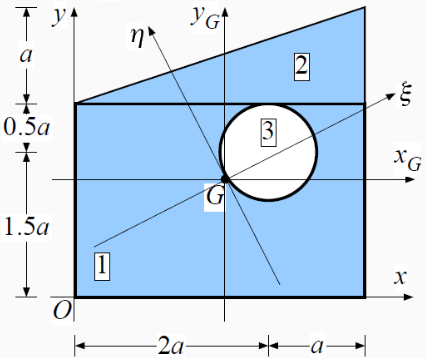


Основные оси

- Некоторые простые формы могут ввести в заблуждение…

Примеры

Решенный пример



No.	A^i	x_{G_i}	y_{G_i}	S_y^i ($A^i x_{G_i}$)	S_x^i ($A^i y_{G_i}$)	$x_G - x_{G_i}$	$y_G - y_{G_i}$	$(x_G - x_{G_i}) \times$ $(y_G - y_{G_i})$	$I_{x_G x_G}$ Local	$I_{x_G x_G}$ Transfer	$I_{y_G y_G}$ Local	$I_{y_G y_G}$ Transfer	$I_{x_G y_G}$ Local	$I_{x_G y_G}$ Transfer
1	$6.000a^2$	$1.500a$	$1.000a$	$9.000a^3$	$6.000a^3$	$+0.053a$	$+0.239a$	$0.013a^2$	$2.000a^4$	$0.343a^4$	$4.500a^4$	$0.017a^4$	$0.000a^4$	$0.076a^4$
2	$1.500a^2$	$2.000a$	$2.333a$	$3.000a^3$	$3.500a^3$	$-0.447a$	$-1.094a$	$0.489a^2$	$0.083a^4$	$1.795a^4$	$0.750a^4$	$0.300a^4$	$+0.125a^4$	$0.734a^4$
3	$0.785a^2$	$2.000a$	$1.500a$	$1.570a^3$	$1.178a^3$	$-0.447a$	$-0.261a$	$0.117a^2$	$0.049a^4$	$0.053a^4$	$0.049a^4$	$0.157a^4$	$0.000a^4$	$0.092a^4$
Tot.	$6.715a^2$	–	–	$10.430a^3$	$8.323a^3$	–	–	–	$2.034a^4$	$2.085a^4$	$5.201a^4$	$0.160a^4$	$0.125a^4$	$0.718a^4$

Решенный пример (2/2)

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_y^i}{\sum_{i=1}^{n} A^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A^i\, x_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} A^i} = \frac{10.430a^3}{6.715a^2} = +1.553a$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_x^i}{\sum_{i=1}^{n} A^i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A^i\, y_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} A^i} = \frac{8.323a^3}{6.715a^2} = +1,239a$$

$$I_{x_G x_G} = 2.034a^4 + 2.085a^4 = 4.119a^4$$

$$I_{y_G y_G} = 5.201a^4 + 0.160a^4 = 5.361a^4$$

$$I_{x_G y_G} = 0.125a^4 + 0.718a^4 = +0.843a^4$$

$$\vartheta = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\,I_{x_G y_G}}{I_{y_G y_G} - I_{x_G x_G}} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\times(+0.843a^4)}{5.361a^4 - 4.119a^4} = +26.8^\circ \quad (\text{против часовой стрелки})$$

$$I_\xi, I_\eta = \frac{1}{2}(I_{x_G x_G} + I_{y_G y_G}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_{y_G y_G} - I_{x_G x_G})^2 + 4\,{I_{x_G y_G}}^2} = \ldots = 4.740a^4 \pm 1.047a^4$$

$$\text{так что} \quad \begin{cases} I_\xi = 3.693a^4 \\ I_\eta = 5.787a^4 \end{cases}$$

Физические измерения

Параметр	Физическое измерение	Система SI
x_G, y_G	L	m
A	L^2	m^2
S_x, S_y	L^3	m^3
I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}	L^4	m^4
$I_{x_G x_G}$, $I_{y_G y_G}$, $I_{x_G y_G}$, I_ξ, I_η	L^4	m^4