

ТЕОРИЯ БАЛКИ - Теорема о виртуальной работе

Строительная механика

Проект ERAMCA

[Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии](#)

v2o22317

Эта работа находится под лицензией [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#).



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

[Цели преподавателя/студентов](#)

[Введение](#)

[Виртуальная работа](#)

[Твердые тела](#)



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Цели преподавателя/студентов



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

-  Представить формулировку, связывающую статику (равновесие) и кинематику (перемещения).
-  Понять принцип и использовать его для расчета перемещений и вращений балок при различных нагрузках и граничных условиях.

Введение



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Теорема о виртуальной работе является одним из фундаментальных опор строительной механики. Первые идеи относительно теоремы восходят к Аристотелю. В конце 18 века Лагранж опубликовал полную теорию на эту тему.

В статье 1921 года Г. Колоннетти утверждает:

С принципом виртуальной работы мы сталкиваемся с общим выражением законов равновесия, таким образом, с наиболее общей формой законов равновесия.

Для применения теоремы о виртуальной работе определены две **независимые** системы **a** и **b** :

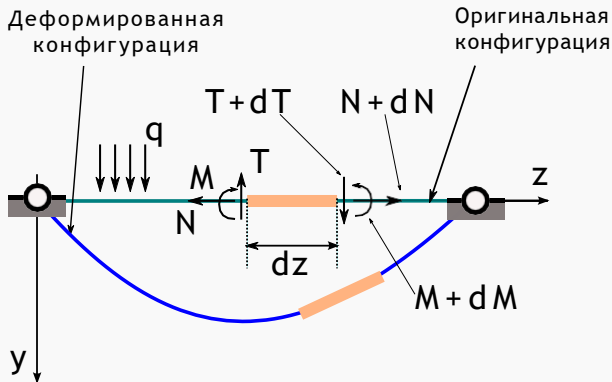
- **a**: **уравновешенная система**, создаваемая внешними силами (нагрузками и реакциями опоры) и внутренними силами (нормальными силами и силами сдвига, изгибающим моментом), т.е. система, которая соблюдает статическое уравнение равновесия
- **b**: **кинематически допустимая система** перемещений и деформаций, т.е. система, которая учитывает кинематические уравнения и условия опор

Уравновешенная система **a**:

$$\frac{dN_a(z)}{dz} = -p_a(z)$$

$$\frac{dT_a(z)}{dz} = -q_a(z)$$

$$\frac{dM_a(z)}{dz} = T_a(z)$$



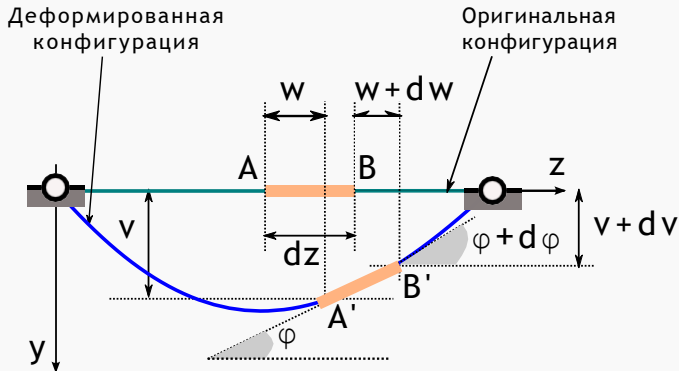
Кинематически допустимая система b :

$$\varepsilon_b(z) = \frac{dw_b(z)}{dz}$$

$$\gamma_b(z) = \frac{dv_b(z)}{dz} + \varphi_b(z)$$

$$\chi_b(z) = \frac{d\varphi_b(z)}{dz}$$

где $\varepsilon_b(z) = \varepsilon_{0,b}(z)$



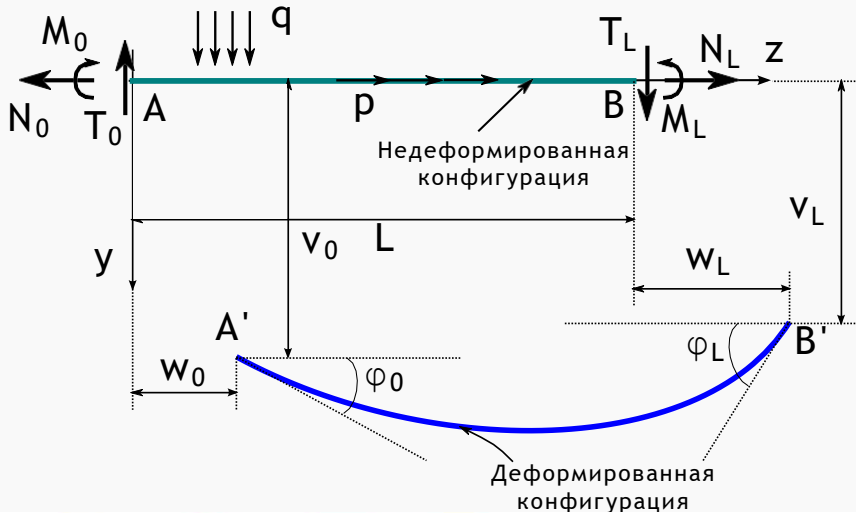
Виртуальная работа



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia



Внешняя виртуальная работа дается:

- нагрузки вдоль балки (для элемента длины dz):

- $d\mathcal{L}_p = (pdz) w = p w dz$

- $d\mathcal{L}_q = (qdz) v = q v dz$

- силы на концах:

- $Z = 0$:

- $\mathcal{L}_{N_0} = -N_0 W_0$

- $\mathcal{L}_{T_0} = -T_0 V_0$

- $\mathcal{L}_{M_0} = -M_0 \varphi_0$

- $Z = L$:

- $\mathcal{L}_{N_L} = N_L W_L$

- $\mathcal{L}_{T_L} = T_L V_L$

- $\mathcal{L}_{M_L} = M_L \varphi_L$

Теорема о виртуальной работе (для деформируемых тел)

Теорема о виртуальной работе (для деформируемых тел) необходимым и достаточным условием равновесия опирающегося тела (отсутствие трения на опорах) является то, что сумма виртуальных работ приложенных сил (внешняя работа) должна быть равна сумме работ внутренних сил (внутренняя работа) для всех возможных систем виртуального смещения, т.е. небольшие перемещения, которые кинематически допустимы по отношению к опорам и целостности конструкции

- Внешняя виртуальная работа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ve} &= \int_0^L (p_a w_b + q_a v_b) dz + \\ &+ (N_a w_b + T_a v_b + M_a \varphi_b) |_L + (-N_a w_b - T_a v_b - M_a \varphi_b) |_0 = \\ &= \int_0^L (p_a w_b + q_a v_b) dz + (N_a w_b + T_a v_b + M_a \varphi_b) |_0^L \end{aligned}$$

- Внутренняя виртуальная работа:

$$\mathcal{L}_{vi} = \int_0^L (N_a \varepsilon_b + T_a \gamma_b + M_a \chi_b) dz$$

- Равенство внешней и внутренней виртуальной работы:

$$\mathcal{L}_{vi} = \mathcal{L}_{ve}$$

Внешняя работа – это:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ve} &= \int_0^L (p_a w_b + q_a v_b) dz + (N_a w_b + T_a v_b + M_a \varphi_b) \Big|_0^L = \\ &= \int_0^L \left[(p_a w_b + q_a v_b) + \frac{d}{dz} (N_a w_b + T_a v_b + M_a \varphi_b) \right] dz\end{aligned}$$

Дифференцирование и упрощение:

$$\mathcal{L}_{ve} = \int_0^L \left[\underbrace{\left(\frac{dN_a}{dz} + p_a \right)}_0 w_b + \underbrace{\left(\frac{dT_a}{dz} + q_a \right)}_0 v_b + \underbrace{\left(\frac{dM_a}{dz} \right)}_{T_a} \varphi_b \right] dz +$$

$$+ \int_0^L \left[N_a \underbrace{\frac{dw_b}{dz}}_{\varepsilon_b} + T_a \frac{dv_b}{dz} + M_a \underbrace{\frac{d\varphi_b}{dz}}_{\chi_b} \right] dz$$

Поскольку система **a** находится в равновесии, а система **b** кинематически допустима (совместима):

$$\mathcal{L}_{ve} = \int_0^L (N_a \epsilon_b + T_a \gamma_b + M_a \chi_b) dz$$

это равно выражению, ранее определенному для внутренней виртуальной работы L_{vj} .

- Теорема о виртуальной работе верна, если система **a** находится в равновесии, а система **b** кинематически допустима. Эти две системы **независимы**.
- Система перемещений, вызванных внешними нагрузками, представляет собой особую систему виртуальных перемещений. Можно найти бесконечное количество альтернативных систем.

- Нет никаких гипотез о поведении материала. Теорема справедлива для любого **определяющего закона** (линейно–упругий, пластичный, вязкий, упруго–пластичный...).
- Из теоремы виртуальной работы возможны следующие приложения:
 - определять перемещения в упругих структурах
 - определять реакции поддержки в статически определенных структурах
 - определять реакции поддержки в статически **неопределенных структурах**

Твердое тело



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Если тело является жестким ($\epsilon_b \equiv 0$, $\gamma_b \equiv 0$ и $\chi_b \equiv 0$ в любой точке), следует, что $L_{vj} = 0$ и, следовательно, $L_{ve} = 0$:

$$\mathcal{L}_{ve} = \int_0^L (p_a w_b + q_a v_b) dz + (N_a w_b + T_a v_b + M_a \varphi_b) \Big|_0^L = 0$$

Таким образом, на твердом теле...

...виртуальная работа всех сил, действующих на него, равна нулю!

Теорема о виртуальной работе (для твердых тел)

Необходимым и достаточным условием равновесия опорного тела (отсутствие трения на опорах) является то, что **сумма виртуальных работ** приложенных сил должна быть равна **нулю** для всех возможных систем виртуальных перемещений, т.е. небольшие перемещения, которые кинематически допустимы по отношению к опорам и целостности конструкции