

ТЕОРИЯ БАЛКИ - Касательное напряжение при кручении

Строительная механика

Проект ERAMCA

[Оценка экологических рисков и их снижение в отношении объектов культурного наследия в Центральной Азии](#)

v2o22317

Эта работа находится под лицензией [Creative Commons "Attribution-ShareAlike 4.0 International"](#).



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

Цели преподавателя/студентов

Введение

Скручивание



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union





Цели преподавателя/студентов



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

-  Представить расчет касательного напряжения (кручения) для балок.
-  Понять гипотезы, различать разные условия загрузки и применять правильные решения.

Введение



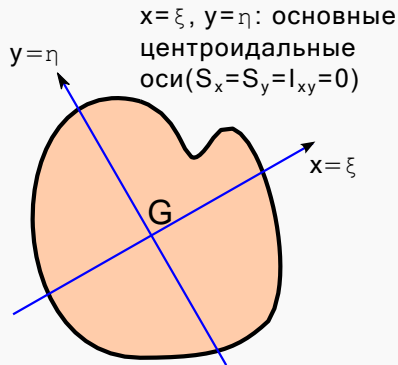
Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia

На протяжении всех слайдов...

...используются **основные центроидальные оси**, обозначенные как (x, y) вместо (ξ, η) !



Эквивалентность между напряжениями и внутренними силами

$$N_z = \int_A \sigma_z dA$$

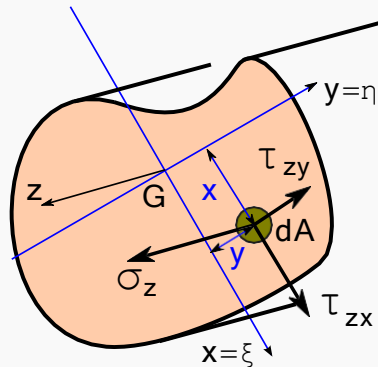
$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA$$

$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA$$



Скручивание



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural
Heritage Assets in Central Asia



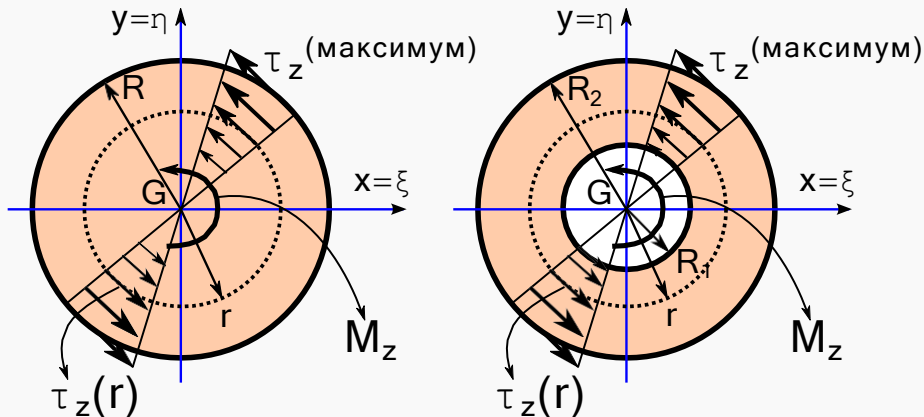
Пара для изгиба, сдвига и скручивания



Скручивающая пара и изгиб: карданный вал



Скручивающая пара для круглого поперечного сечения - модель



Напряжения сдвига принимаются равными:

- Перпендикулярно r
- Пропорционально r : $\tau_z = k r$

$$M_z = \int_A \tau_z r dA = \int_A k r^2 dA = k \int_A r^2 dA$$

Определяется $I_p = \int_A r^2 dA$ как **полярный момент инерции**, следовательно:

$$M_z = k I_p \implies k = \frac{M_z}{I_p}$$

Следовательно:

$$\tau_z = \frac{M_z}{I_p} r$$

$$\tau_z^{(max)} = \frac{M_z}{I_p} R$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_y + I_x = \frac{\pi}{4} R^4 + \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{2} R^4$$

Для полого круглого поперечного сечения:

$$I_p = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$\tau_z^{(max)} = \frac{M_z}{I_p} R_2$$

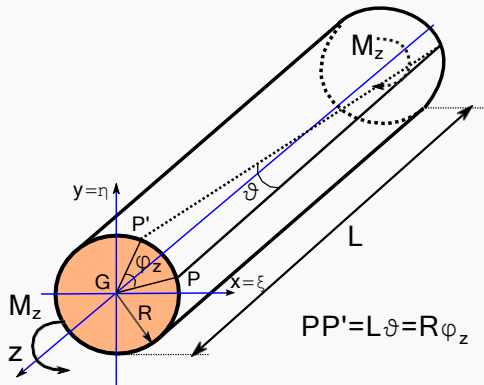
Круглое поперечное сечение - угол скручивания

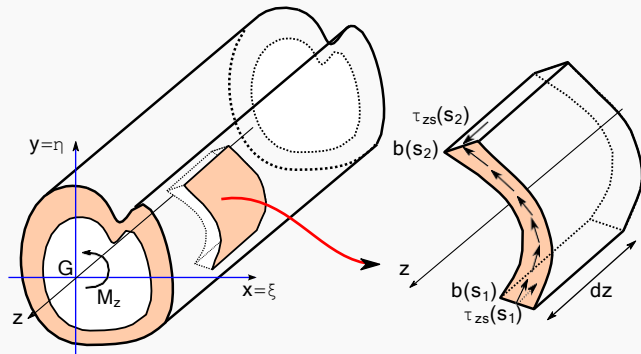
Это для круглого поперечного сечения и
полого круглого поперечного сечения:

$$\vartheta = \frac{M_z}{G I_p}$$

где ϑ представляет угол
скручивания, т.е.:

$$\vartheta = \frac{d\varphi_z}{dz}$$





Можно доказать, что **ПОТОК СДВИГА** $\tau_{zs}(s)b(s)$ постоянен:

Равновесие вдоль z : $\tau_{zs}(s_1) b(s_1) dz = \tau_{zs}(s_2) b(s_2) dz$ из которого:

$$\tau_{zs}(s)b(s) = \text{константа}$$

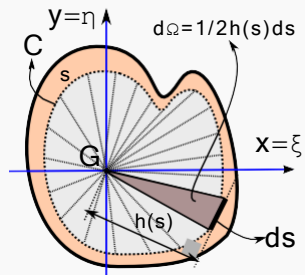
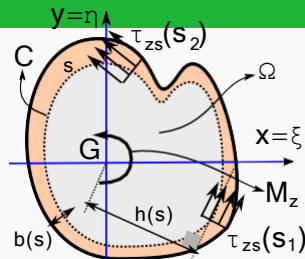
Эквивалентность между M_z и касательными напряжениями:

$$M_z = \oint_C \tau_{zs}(s) b(s) h(s) ds = \tau_{zs}(s) b(s) \oint_C h(s) ds$$

где $\Omega = \frac{1}{2} \oint_C h(s) ds$ площадь, ограниченная центральной линией C поперечного сечения стенки (описываемой s), поэтому:

$$M_z = \tau_{zs}(s) b(s) 2\Omega \quad \text{и:}$$

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_z}{2\Omega b(s)} \quad \text{Формула Бредта}$$



Можно доказать, что угол скручивания равен:

$$\vartheta = \frac{M_z}{G I_t}$$

где:

$$I_t = \frac{4 \Omega^2}{\oint_C \frac{ds}{b(s)}}$$

Интегралы $\oint_C \dots ds$ равны...

... сумма, вычисленная по закрытой центральной линии (определяемой криволинейной абсциссой s).

Скручивающая пара - прямоугольное поперечное сечение

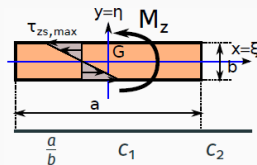
Из продвинутых учебников можно получить решение для сложных поперечных сечений, как и для **прямоугольного поперечного сечения**.

Напряжения сдвига **параллельны** более длинной стороне поперечного сечения, их распределение **линейно** с нулем на оси x и максимальной величиной на грани ($y = \pm \frac{b}{2}$)

Для различных значений a/b :

$$\tau_{zs,max} = \frac{M_z}{c_1 a b^2}$$

$$\vartheta = \frac{M_z}{G(c_2 a b^3)}$$



$\frac{a}{b}$	c_1	c_2
1	0.208	0.141
1.2	0.219	0.166
1.5	0.231	0.196
2	0.246	0.229
2.5	0.248	0.249
3	0.267	0.263
4	0.282	0.281
5	0.291	0.291
10	0.312	0.312
∞	0.333	0.333

Скручивающаяся пара - тонкостенные открытые элементы

Для поперечного сечения, состоящего из N прямоугольников со сторонами, равными a_i и b_i , с

$\frac{a_i}{b_i} \rightarrow \infty$ (т.е., $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$) это:

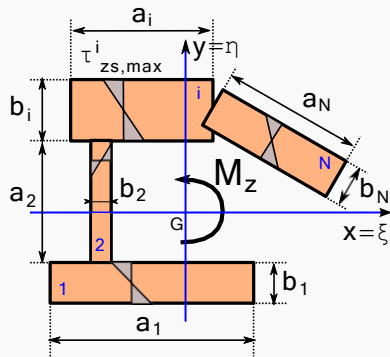
$$\tau_{zs,max}^i = \frac{M_z}{I_t} b_i$$

где:

$$I_t^i = \frac{1}{3} a_i b_i^3 \quad \text{and} \quad I_t = \sum_{i=1}^N I_t^i$$

Угол закручивания задается:

$$\vartheta = \frac{M_z}{G I_t}$$



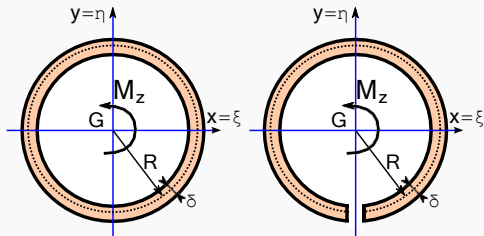
Тонкостенные пустотные и тонкостенные открытые элементы

Тонкостенные пустотные элементы:

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{2 \Omega \delta} = \frac{M_z}{2 (\pi R^2) \delta}$$

Тонкостенные открытые элементы:

$$\tau_{zs,max} = \frac{M_z}{I_t} \delta = \frac{M_z}{\frac{1}{3} (2\pi R) \delta^3} \delta = \frac{3M_z}{2\pi R \delta^2}$$



Замечено, что максимальный стресс...

... достигается в тонкостенном открытом поперечном сечении. Тонкостенные пустотные элементы являются наиболее эффективной конструкцией с точки зрения крутящего момента

- Положительный знак присваивается напряжениям с одинаковым значением вращения M_z